代 数 几 何 原 理

PHILLIP GRIFFITHS
JOSEPH HARRIS

Xian Xian 译

前 言

代数几何是数学中最古老和最高度发达的学科。它与射影几何, 复分析, 拓扑, 数论以及其它目前数学上活跃的领域密切相关。还有, 近年来, 代数几何在风格和语言上都经历了巨大的变化。由于这些原因, 这个学科得到了“难入门”的说法。本书对理论的某些主要一般性结果做了介绍, 以及——其实特别强调了——应用于有意义例子的研究和计算工具的发展。

很多原则指导了本书的酝酿。其一是只讲述对研究具体的几何问题和特殊类型的代数簇所必须的一般性的方法, 这些是本书的中心。

其二是在一般性理论和研究例子之间应该有一个取舍, 就象目录所说明的一样。代数几何的主旨为在例子的纷繁复杂和一般性结构的对称性之间提供平衡特别重要; 我们希望在课题和讲述顺序上反映这个关系。

第三个基本原则是本书应该是自足的。特别是, 任何要利用到的具体结果都将完全证明。在与代数几何不同的学科中, 学生遇到的困难是大量的交叉引用, 这也是自足化的一方面原因。类似地, 我们避免暗中提到——或只陈述不证明——有关结果。本书决不是代数几何的概述, 而是用详细而具体的几何问题来发展一套有效的工具。对本主题, 我们的方法最初是解析的: 第零和第一章讨论复流形理论的基本方法和结果, 特别强调了可应用于射影簇的结果。从第二章开始讨论 Riemann 曲面和代数曲线, 接着第四和第六章分别讨论代数曲面和二次线丛, 沿着经典的路线, 我们逐渐增加几何的内容。第三和第五章继续讨论解析方法, 推进到复流形中更专门的课题。

几个重要的课题被完全忽略了。最重要的是代数簇的算术理论, 模问题以及奇异性。在这些方面, 这里没有提供必要的方法。其它课题, 比如单值化, 自同构形式或单值性, 混合 Hodge 结构也被忽略, 虽然大部分方法这里都有。

致谢略。

PHILLIP GRIFFITH
JOSEPH HARRIS

*1978*年*5*月
Cambridge, Massachustts

目 录

第零章 基础知识

在本章, 我们概述了多复变理论, 复流形理论, 拓扑和微分几何等基础知识, 它们将在我们的代数几何研究中使用。虽然我们的讲述基本上是自足的, 但是我们默认读者基本熟悉要讨论的材料。本章的基本目的是建立我们的观点和介绍在形式上需要的结果, 它们将在后面要用到。泛泛而言, 有四个主要部分:

1. *Weierstrass 定理及其推论*, 在第一和第二节讨论。它们给出了解析簇局域特征的基本图像。定理本身不被后面直接引用, 但是图像是根本性的, 例如, 解析簇作为多圆盘分支覆盖的局域表示。局域解析几何的基础在第五章进一步讨论。

2. *层论*, 在第三节讨论。它是把代数簇的解析, 拓扑和几何内容联系起来的重要工具。一个好的例子是*指数层序列*, 它的各个项 $\mathbb{Z}$, $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{O}^*$ 分别反映了簇下面的拓扑, 解析和几何结构。

3. *相交理论*, 在第四节讨论。它是经典代数几何的基石。它使我们可以用拓扑方法来处理代数簇的接合性质这个先验的几何问题。

4. *Hodge 理论*, 在第六和第七节讨论。它是目前为止在本章介绍的最复杂的方法, 在目前的背景下, Hodge 理论有两个主要的应用: 首先, 它提供了 Kähler 流形上同调的 Hodge 分解; 接着, 它与第五节介绍的公式一起得到了下一章的消没定理。

1. 多复变初步

Cauchy 公式及应用

符号: 对 $\mathbb{C}^n$ 中的点, 将写作 $z=(z_1,\cdots,z_n)$, 并且

$$\begin{aligned} z_i &= x_i+\sqrt{-1}y_i; \\ \|z\|^2 &= (z,z)=\sum_{i=1}^n |z_i|^2。 \end{aligned}$$

对 $\mathbb{C}^n$ 中的开集 U, 把定义在 U 上的 C^∞ 函数的集合写作 $C^\infty(U)$; 定义在 U 的闭集 $\overline{U}$ 的某些邻域上的 C^∞ 函数的集合写作 $C^\infty(\overline{U})$。

$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n$ 中的点的余切空间由 $\{dx_i, dy_i\}$ 张开; 但是通常用复数基

$$dz_i = dx_i+\sqrt{-1}dy_i, \quad d\bar{z}_i = dx_i-\sqrt{-1}dy_i$$

和余切空间中的对偶基

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

更方便。用这个符号，全微分的公式为

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j。$$

在单变量下，我们称开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}^\infty$ 函数是全纯的, 如果它满足 Cauchy–Riemann 方程 $\partial f \partial \bar{z} = 0$。用 $f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$, 这等于

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0。 \end{aligned}$$

我们称 f 是解析的, 如果对所有的 $z_0 \in U$, f 在 $z - z_0$ 中有局域级数展开, 即, 在某些圆盘 $\Delta(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ 中

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中, 求和是绝对收敛和单值的。第一个结果是, f 是解析的当且仅当它是全纯的; 为了证明它, 我们利用

Cauchy 积分公式: 对 $\mathbb{C}$ 中的圆盘 Δ, $f \in C^\infty(\bar{\Delta})$, $z \in \Delta$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w - z} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Delta} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z},$$

其中, 线积分取逆时针方向(最后的积分定义的情况将在证明中出现)。

证明: 此证明是基于带奇异点的微分形式的 Stokes 公式, 这个方法在第三章将给出公式。考虑微分形式

$$\eta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f(w)dw}{w - z};$$

对 $z \neq w$, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\left(\frac{1}{w - z}\right) = 0$$

且因此得到

$$d\eta = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z}。$$

设 $\Delta_\varepsilon=\Delta(z,\varepsilon)$ 是 z 周围半径为 ε 的圆盘。形式 η 在 $\Delta-\Delta_\varepsilon$ 中是 C^∞ 的, 并且应用 Stokes 定理, 我们得到,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(w)dw}{w-z} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z}\\ &\quad+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Delta-\Delta_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}。\end{aligned}$$

设 $w-z=re^{i\theta}$, 有

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(w)dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\varepsilon e^{i\theta})d\theta,$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时它趋于 $f(z)$; 还有,

$$dw\wedge d\bar{w}=-2\sqrt{-1}dx\wedge dy=-2\sqrt{-1}rdr\wedge d\theta,$$

所以,

$$\left|\frac{\partial f(w)}{\partial\bar{w}}-\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}\right|=2\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}dr\wedge d\theta\right|\leqslant c|dr\wedge d\theta|。$$

因此, $(\partial f/\partial\bar{w})(dw\wedge d\bar{w})/(w-z)$ 在 Δ 上绝对可积, 并且当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\int_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}\to 0;$$

得到结果。

证毕

现在, 我们可以证明

命题: 对 $\mathbb{C}$ 中的开集 U 和 $f\in C^\infty(U)$, f 是全纯的当且仅当它是解析的。

证明: 首先假设 $\partial f/\partial\bar{z}=0$。那么, 对 $z_0\in U$, 充分小的 ε, 在 z_0 周围半径为 ε 的圆盘 $\Delta=\Delta(z_0,\varepsilon)$ 中的 z, 有

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z}\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)-(z-z_0)}\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n;\end{aligned}$$

因此, 设

$$a_n=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}},$$

我们得到, 对 $z \in \Delta$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中, 在任意更小的圆盘中, 求和是绝对收敛和单值的。

相反地, 对 $z \in \Delta = \Delta(z_0, \varepsilon)$, 假定 $f(z)$ 有一个幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n。$$

因为 $(\partial/\partial\bar{z})(z - z_0)^n = 0$, 所以级数的部分求和满足无面积积分的 Cauchy 公式, 因为在 z_0 邻域中求和的单值收敛, 这对 f 也是正确的, 即,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w - z}。$$

因为对 $z \neq w$,

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left(\frac{1}{w - z} \right) = 0,$$

所以在积分号下微分得到

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left(\frac{f(w)}{w - z} \right) dw = 0。$$

证毕

我们现在证明单变量的最后一个结果: 在圆盘 Δ 上给定一个 C^∞ 函数, 方程

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}} = g$$

总可以在更小的圆盘上可解; 即,

单变量 $\bar{\partial}$-Poincaré 引理 *给定 $g(z) \in C^\infty(\bar{\Delta})$, 函数*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Delta} \frac{g(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w}$$

在 Δ 中有定义且是 C^∞ 的, 满足

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}} = g。$$

证明: 对 $z_0 \in \Delta$, 选择 ε 使得圆盘 $\Delta(z_0, 2\varepsilon) \subset \Delta$, 并且写出

$$g(z) = g_1(z) + g_2(z),$$

其中, $g_1(z)$ 在 $\Delta(z_0, 2\varepsilon)$ 外等于零, $g_2(z)$ 在 $\Delta(z_0, \varepsilon)$ 中等于零。积分

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Delta} g_2(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z}$$

有明确的定义, 并且在 $z \in \Delta(z_0, \varepsilon)$ 是 C^∞ 的; 所以, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_2(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g_2(w)}{w-z} \right) dw \wedge d\bar{w} = 0。$$

因为 $g_1(z)$ 有紧致支集, 我们可以写出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Delta g_1(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\mathbb{C} g_1(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\mathbb{C} g_1(u+z) \frac{du \wedge d\bar{u}}{u}, \end{aligned}$$

其中, $u = w - z$。转换到极坐标 $u = re^{i\theta}$, 这个积分变成

$$f_1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_\mathbb{C} g_1(z + re^{i\theta}) dr \wedge d\theta,$$

它明显在 z 有定义且是 C^∞ 的。那么,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} &= -\frac{1}{\pi} \int_\mathbb{C} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} (z + re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr \wedge d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Delta \frac{\partial g_1}{\partial \bar{w}} (w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}; \end{aligned}$$

但是 g_1 在 $\partial\Delta$ 上等于零, 因此由 Cauchy 公式得到

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_1(z) = g_1(z) = g(z)。$$

证毕

多复变理论

在 $\mathbb{C}^n$ 上函数 f 的全微分公式

$$df = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

中, 我们把第一项表示为 ∂f, 第二项表示为 $\bar{\partial} f$; ∂ 和 $\bar{\partial}$ 是在坐标的复线性变化中不变的微分算子。开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上 C^∞ 函数 f 称为全纯的, 如果 $\bar{\partial} f = 0$; 这等价于 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 在每个变量 z_i 中分别全纯。

就象在单变量情形一样, 函数 f 是全纯的当且仅当它有变量 z_i 的局域幂级数展开。这在一方面是显然的: 由前面同样的讨论, 收敛幂级数定义一个全纯函数。我们验证 $n = 2$ 情形下的逆问题; 对一般的 n, 计算只有符号上的困难。对开集 $U \subset \mathbb{C}^2$ 中的全纯函数 f, $z_0 \in U$, 我们可以固定 $z_0 \in U$ 周围半径为 r 的圆盘 Δ, 对 $(z_1, z_2) \in \Delta$, 应用单变量的

Cauchy 公式两次, 得到

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w_2-z_{0_2}|=r}\frac{f(z_1,w_2)dw_2}{w_2-z_2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w_2-z_{0_2}|=r}\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w_1-z_{0_1}|=r}\frac{f(w_1,w_2)dw_1}{w_1-z_1}\right]\frac{dw_2}{w_2-z_2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2\int\int_{|w_i-z_{0_i}|=r}\frac{f(w_1,w_2)dw_1dw_2}{(w_1-z_1)(w_2-z_2)}。\end{aligned}$$

利用级数展开

$$\frac{1}{(w_1-z_1)(w_2-z_2)}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(z_1-z_{0_1})^m(z_2-z_{0_2})^n}{(w_1-z_{0_1})^{m+1}(w_2-z_{0_2})^{n+1}},$$

我们得到, f 有一个局域级数展开

$$f(z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{m,n}(z_1-z_{0_1})^m(z_2-z_{0_2})^n。$$

证毕

多复变理论中的很多结果都可以从单复变直接拿来, 比如恒等定理: *如果 f 和 g 在连通开集 U 中是全纯的, 并且在 U 的一个非空开集上 $f=g$, 那么, $f=g$*, 以及最大值原理: *在开集 U 上的全纯函数 f 的绝对值在 U 中没有最大值*。但是, 在单复变和多复变情形之间有一些惊人的差别。例如, 设 U 是多圆盘 $\Delta(r)=\{(z_1,z_2):|z_1|,|z_2|<r\}$, 并且设 $V\subset U$ 是任给 $r'<r$ 的更小的多圆盘 $\Delta(r')$。那么, 我们有

Hartogs 定理: *在 $U-V$ 的邻域中任意全纯函数 f 扩张到 U 上的全纯函数*。

证明: 在每个垂直切片 $z_1=$ 常数中, 区间 $U-V$ 看起来象圆环 $r'<|z_2|<r$, 或者象圆盘 $|z_2|<r$。我们试图把在每个切片中的 f 用 Cauchy 公式来扩张, 设

$$F(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w_2|=r}\frac{f(z_1,w_2)dw_2}{w_2-z_2}。$$

F 定义在整个 U 上; 它在 z_2 中明显上全纯的, 并且因为 $(\partial/\partial\bar{z}_1)f=0$, 所以它在 z_1 中也是全纯的。还有, 在 $U-V$ 的开集 $|z_1|>r'$ 中, 由 Cauchy 公式 $F(z_1,z_2)=f(z_1,z_2)$; 因此 $F|_{U-V}=f$。 证毕

Hartogs 定理应用于许多集合配对 $V\subset U\subset\mathbb{C}^n$; 它通常的应用方式为:

在开集 $U\subset\mathbb{C}^n(n>1)$ 中的一个点的补集上的全纯函数扩张到所有 U 中的一个全纯函数。

Weierstrass 定理和推论

在单变量理论中, 每个解析函数有一个唯一的局域表示

$$f(z)=(z-z_0)^n u(z), \quad u(z_0)\neq 0,$$

因此, 我们特别知道, f 的零点轨迹是离散的。类似地, Weierstrass 定理给出了多复变全纯函数的局域表示, 由此, 我们得到它们的零点集合的局域几何图像。

假设我们在 $\mathbb{C}^n$ 的原点的某些邻域中给出一个全纯函数 $f(z_1,\cdots,z_{n-1},w)$, 并且 $f(0,\cdots,0)=0$。假定 f 在 w 轴上不恒等于零, 即, f 在原点周围的幂级数展开包含一项 $a\cdot w^d$, 且 $a\neq 0$和 $d\geqslant 1$; 显然, 这就是大多数坐标系下的情况。

对适当的 r, δ 和 $\varepsilon>0$, 那么, 当 $|w|=r$ 时 $|f(0,w)|\geqslant\delta>0$, 并且因此对 $|w|=r$, $\|z\|\leqslant\varepsilon$, 有 $|f(z,w)|\geqslant\delta/2$。现在, 如果 $w=b_1,\cdots,b_d$ 是 $|w|<r$ 时 $f(z,w)=0$ 的根, 由留数定理,

$$b_1^q+b_2^q+\cdots+b_d^q=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w|=r}\frac{w^q(\partial f/\partial w)(z,w)}{f(z,w)}dw;$$

所以幂求和 $\sum b_i(z)^q$ 是 $\|z\|<\varepsilon$ 时 z 的解析函数。设 $\sigma_1(z),\cdots,\sigma_d(z)$ 是 $b_1,\cdots,b_d$ 的基本对称多项式; $\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 可表示为幂求和 $\sum b_i(z)^q$ 中的多项式。因此, 函数

$$g(z,w)=w^d-\sigma_1(z)w^{d-1}+\cdots+(-1)^d\sigma_d(z)$$

在 $\|z\|<\varepsilon,|w|<r$ 时是全纯的, 并且正好在与 f 一样的集合中等于零。商

$$h(z,w)=\frac{f(z,w)}{g(z,w)}$$

有定义, 并且在 $\|z\|<\varepsilon,|w|<r$ 中——至少在 f 和 g 的零点之外——是全纯的。还有, 对固定的 z, $h(z,w)$ 在圆盘 $|w|<r$ 中只有可去掉的奇异点, 所以 h 可扩张到所有 $\|z\|<\varepsilon$, $|w|<r$ 中的函数, 并且对每个固定的 z, 在 w 中是解析的, 也在零点轨迹的补集中解析。写出

$$h(z,w)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w|=r}\frac{h(z,u)du}{u-w},$$

我们得到, h 在 z 中也是全纯的。

定义: w 的 *Weierstrass* 多项式是如下形式的多项式:

$$w^d+a_1(z)w^{d-1}+\cdots+a_d(z), \quad a_i(0)=0。$$

我们已经证明了下面定理的存在性部分:

Weierstrass 预备定理: *如果 f 在 $\mathbb{C}^n$ 的原点周围是全纯的, 并且在 w 轴上不恒等于零, 那么, 在原点的某些邻域中, f 可以唯一地写作*

$$f=g\cdot h,$$

其中, g 是 w 的次数为 d 的 Weierstrass 多项式, 并且 $h(0)\neq 0$ 。

唯一性是显然的, 因为正好与 f 一样等于零的任意 Weierstrass 多项式的系数由积分

$$\int_{|w|=r} \frac{w^q(\partial f/\partial w)(z,w)dw}{f(z,w)}$$

中的多项式给出。从 Weierstrass 定理我们知道, 在 $\mathbb{C}^n$ 的原点邻域中全纯的函数 f 的零点轨迹, 对大多数坐标系, $z_1,\cdots,z_{n-1},w$ 是下列 Weierstrass 多项式的零点轨迹:

$$g(z,w)=w^d+a_1(z)w^{d-1}+\cdots+a_d(z)。$$

现在, 多项式 $g(z,\cdot)$ 的根 $b_i(z)$, 除了 $g(z,\cdot)$ 有重根的那些 z 值外, 是 z 的局域单值全纯函数。因为 $g(z,\cdot)$ 的判别式是 z 的解析函数, 所以

在 w 轴上不恒等于零的解析函数 $f(z_1,\cdots,z_{n-1},w)$ 的零点轨迹, 作为在解析函数的零点轨迹上分支的一个有限叶覆盖而局域投影到超平面 $(w=0)$ 上。

作为预备定理的一个推论, 我们得到

Riemann 扩张定理: *假设 $f(z,w)$ 在圆盘 $\Delta\subset\mathbb{C}$ 中是全纯的, $g(z,w)$ 在 $\bar{\Delta}-\{f=0\}$ 中是全纯的并且有界, 那么 g 可扩张为 Δ 上的全纯函数。*

证明 (在 0 的邻域中): 假设直线 $z=0$ 不包含在 $\{f=0\}$ 中。象以前一样, 我们可以找到 r 和 $\delta>0$ 使得对 $|w|=r$ 有 $|f(0,w)|\geqslant\delta>0$, 并且找到 ε 使得对 $\|z\|<\varepsilon$ 和 $|w|=r$ 有 $|f(z,w)|>\delta/2$; 那么 f 只在圆盘 $z=z_0,|w\leqslant r$ 内部有零点。由单变量理论的 Riemann 扩张定理, 我们可以把 g 扩张到 $|z|<\varepsilon,|w|<r$ 中的函数 $\tilde{g}$, 它在 $\{f=0\}$ 外是全纯的, 并且在 w 中处处全纯。象以前一样, 我们写出

$$\tilde{g}(z,w)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|u|=r}\frac{\tilde{g}(z,u)du}{u-w}$$

得到, $\tilde{g}$ 在 z 中也是全纯的。 证毕

我们回想一下初等代数的结果和定义: 设 R 是整环, 即一个环, 使得对 $u,v\in R$, $u\cdot v=0\Rightarrow u=0$ 或 $v=0$。元素 $u\in R$ 是单位, 如果存在 $v\in R$ 使得 $u\cdot v=1$; u 是*不可约的*, 如果对 $v,w\in R,u=v\cdot w$ 意味着 v 是一个单位或 w 是一个单位。 R 是*唯一因子分解整环(UFD)*, 如果每个 $u\in R$ 可以写作不可约元素 $u_1,\cdots,u_l$ 的积, 且除了被一个单位相乘外 u_i 是唯一的。我们将利用的主要结果是:

1. R 是一个 UFD$\Rightarrow R[t]$ 是一个 UFD(Gauss 引理)。

2. 如果 R 是一个 UFD 并且 $u,v\in R$ 是互质的, 那么存在互质元素 $\alpha,\beta\in R[t],\gamma\neq0\in R$, 使得

$$\alpha u+\beta v=\gamma。$$

γ 称为 u 和 v 的结式。

设 $\mathscr{O}_{n,z}$ 表示定义在 $z\in\mathbb{C}^n$ 的某些邻域中的全纯函数环; 把 $\mathscr{O}_{z,0}$ 写作 $\mathscr{O}_n$。由恒等定理, $\mathscr{O}_n$ 是整环, 并且还是*最大理想 m 为 $\{f:f(0)=0\}$ 的局域环*。 $f\in\mathscr{O}_n$ 是一个单位当且仅当 $f(0)\neq0$。第一个结果是:

命题: $\mathscr{O}_n$ 是一个 *UFD*。

证明: 利用归纳法。假设 $\mathscr{O}_{n-1}$ 是一个 UFD 且设 $f \in \mathscr{O}_n$。我们可以假设 f 对于 $w = z_n$ 是规则的; 即, $f(0, \cdots, 0, w) \not\equiv 0$。写出

$$f = g \cdot u,$$

其中, u 是 $\mathscr{O}_n$ 中的单位, $g \in \mathscr{O}_{n-1}[w]$ 是 Weierstrass 多项式。由 Gauss 引理, $\mathscr{O}_{n-1}[w]$ 是一个 UFD, 并且因此我们把 g 写作不可约元素 $g_1, \cdots, g_m \in \mathscr{O}_{n-1}[w]$ 的积

$$(*) \qquad f = g_1 \cdots g_m \cdot u,$$

其中, 因子 g_i 除了单位乘法外唯一确定。现在假设我们把 f 写作不可约元素 $f_1, \cdots, f_k \in \mathscr{O}_n$ 的积。每个 f_i 对于 w 必是规则的, 并且我们可以写出

$$f_i = g_i' \cdot u_i,$$

其中 u_i 是单位, g_i' 是 Weierstrass 多项式, 应该在 $\mathscr{O}_{n-1}[w]$ 中不可约。我们得到,

$$f = g \cdot u = \prod g_i' \cdot \prod u_i',$$

其中 g 和 $\prod g_i'$ 都是 Weierstrass 多项式; 由 Weierstrass 预备定理,

$$g = \prod g_i',$$

并且因为 $\mathscr{O}_{n-1}[w]$ 是一个 UFD, 所以得到, 除了单位外, g_i' 与 g_i 是一样的。因此, 表达式 $(*)$ 表示 $\mathscr{O}_n$ 中 f 的唯一分解。 证毕

命题: *如果 f 和 g 在 $\mathscr{O}_{n,0}$ 中互质, 那么对 $\|z\| < \varepsilon$, f 和 g 在 $\mathscr{O}_{n,z}$ 中也互质。*

证明: 我们可以假设, f 和 g 对于 z_n 是规则的, 并且都是 Weierstrass 多项式; 对足够小的每个固定的 $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$, 我们得到, 在 z_n 中 $f(z', z_n) \not\equiv 0$, 现在, 我们可以写出

$$\alpha f + \beta g = \gamma,$$

其中, $\alpha, \beta \in \mathscr{O}_{n-1}[w]$, $\gamma \in \mathscr{O}_{n-1}$; 方程在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的某些邻域成立。

如果对某些小的 $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $f(z_0) = g(z_0) = 0$ 且 f 和 g 在 $\mathscr{O}_{n,z_0}$ 中有公共因子 $h(z', z_n)$并且 $h(z_0) = 0$, 那么,

$$\begin{aligned} h|f, h|g \quad &\Rightarrow \quad h|\gamma \\ &\Rightarrow \quad h \in \mathscr{O}_{n-1}。\end{aligned}$$

但是于是 $h(z_{0_i}, \cdots, z_{0_{n-1}}, z_n)$ 在 z_n 中恒等于零, 与我们的假设 $f(z_{0_i}, \cdots, z_{0_{n-1}}, z_n) \not\equiv 0$矛盾。 证毕

我们现在证明

Weierstrass 除法定理: 设 $g(z,w) \in \mathscr{O}_{n-1}[w]$ 是 w 中次数为 k 的 *Weierstrass* 多项式。那么, 任给 $f \in \mathscr{O}_n$, 我们可以得到

$$f = g \cdot h + r,$$

其中 $r(z,w)$ 是 w 中次数 $< k$ 的多项式。

证明: 对足够小的 $\varepsilon, \delta > 0$, 对 $\|z\| < \varepsilon, |w| < \delta$ 定义

$$h(z,w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z,u)}{g(z,u)} \frac{du}{u-w}。$$

h 显然是全纯的, 于是得出 $r = f - gh$ 。我们得到

$$\begin{aligned} r(z,w) &= f(z,w) - g(z,w) \cdot h(z,w) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=\delta} \left[f(z,u) - g(z,w) \frac{f(z,u)}{g(z,w)} \right] \frac{du}{u-w} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z,u)}{g(z,u)} \frac{g(z,u) - g(z,w)}{u-w} du。 \end{aligned}$$

但是 $(u-w)$ 把 $[g(z,u) - g(z,w)]$ 分成 w 中的多项式; 因此,

$$p(z,u,w) = \frac{g(z,u) - g(z,w)}{u-w}$$

是次数 $< k$ 的 w 中的多项式。因为因子 w 在 $r(z,w)$ 的展开中只出现在 p 中, 我们得到, $r(z,w)$ 是次数 $< k$ 的 w 中的多项式。显然, 如果

$$p(z,u,w) = p_1(z,u) \cdot w^{k-1} + \cdots + p_k(z,u),$$

那么

$$r(z,w) = a_1(z) \cdot w^{k-1} + \cdots + a_k(z),$$

其中,

$$a_i(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z,u)}{g(z,u)} p_i(z,u) du。$$

证毕

推论(弱零点定理): 如果 $f(z,w) \in \mathscr{O}_n$ 是不可约的, $h \in \mathscr{O}_n$ 在集合 $f(z,w) = 0$ 中等于零, 那么在 $\mathscr{O}_n$ 中 f 整除 h。

证明: 首先, 我们假设 f 是 w 中次数为 k 的 Weierstrass 多项式。因为 f 是不可约的, 所以 f 和 $\partial f / \partial w$ 在 $\mathscr{O}_{n-1}[w]$ 中互质($\deg_w f > \deg_w \partial f / \partial w$); 因此我们可以得到

$$\alpha \cdot + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial w} = \gamma, \quad \gamma \in \mathscr{O}_{n-1}, \quad \gamma \not\equiv 0。$$

如果对一个给定的 z_0，$f(z_0,w)\in\mathbb{C}[w]$ 有重根 u, 那么, 我们得到

$$\begin{aligned} f(z_0,u) &= \frac{\partial f}{\partial w}(z_0,u)=0 \\ &\Rightarrow \gamma(z_0)=0; \end{aligned}$$

因此，$f(z,w)$ 在 w 中对 $\gamma(z)\neq 0$ 有 k 个不同的根。现在, 由除法定理, 我们可以写出

$$h=f\cdot g+r,\quad r\in\mathscr{O}_{n-1}[w],\quad \deg r<k。$$

但是任给在轨迹 $(\gamma=0)$ 之外的 z_0，$f(z_0,w)$ 并且因此 $h(z_0,w)$ 在 w 中至少有 k 个不同的根。因为次数 $r<k$, 所以这意味着 $r(z_0,w)=0\in\mathbb{C}[w]$; 得到 $r\equiv 0$ 和 $h=f\cdot g$。 证毕

解析簇

上述结果的主要目的是描写 $\mathbb{C}^n$ 中解析簇的基本局域性质。我们称开集 $U\subset\mathbb{C}^n$ 的子集 V 是 U 中的解析簇, 如果对任意 $p\in U$, 存在 U 中 p 的邻域 U', 使得 $V\cap U'$ 是 U' 中全纯函数 $f_1,\cdots,f_k$ 的有限集合的公共零点轨迹。特别是, 如果 V 是单个非零全纯函数 f 的零点轨迹, 那么它称为解析超曲面。

解析簇 $V\subset U\subset\mathbb{C}^n$ 称为不可约的, 如果 V 不能写作两个解析簇 $V_1,V_2\subset U$ 的并, 其中 $V_1,V_2\neq V$; 它在 $p\in V$ 称为是不可约的, 如果 $V\cap U'$ 对 U 中 p 的小邻域是不可约的。首先要注意, 如果 $f\in\mathscr{O}_n$ 在环 $\mathscr{O}_n$ 中是不可约的, 那么, 在 0 的邻域中由 f 给出的解析超曲面 $V=\{f(z)=0\}$ 在 0 是不可约的: 如果 $V=V_1\cup V_2$, 且 V_1,V_2 是 $\neq V$ 的解析簇, 那么, 存在 $f_1,f_2\in\mathscr{O}_n$, 满足 $f_1(f_2)$ 在 $V_1(V_2)$ 上恒等于零但是在 $V_2(V_1)$ 上不恒等于零。由零点定理，f 必须整除积 $f_1\cdot f_2$; 因为 f 是不可约的, 就得到 f 必须整除 f_1 或 f_2, 即，$V_1\supset V$ 或者 $V_2\supset V$, 产生矛盾。除了解析超曲面的基本图像(P.9), 我们得到

1. 假设 $V\subset U\subset\mathbb{C}^n$ 是解析超曲面, 在 $0\in V$ 的邻域中由 $V=\{f(z)=0\}$ 给出。因为 $\mathscr{O}_n$ 是一个 UFD, 我们可以写出

$$f=f_1\cdots f_n,$$

其中，f_i 在 $\mathscr{O}_n$ 中不可约; 如果我们设 $V_i=\{f_i(z)=0\}$, 那么我们有

$$V=V_1\cup\cdots\cup V_k,$$

其中，V_i 在 0 处是不可约的。因此, 如果 p 是任意解析超曲面 $V\subset U\subset\mathbb{C}^n$ 上的任意点, 那么，V 可以在 p 的某些邻域 U' 中唯一表示为在 p 处不可约的有限个解析超曲面的并。

2.设 $W\subset U\subset\mathbb{C}^n$ 是在 $0\in W$ 的邻域中作为两个函数 $f,g\in\mathscr{O}_n$ 的零点轨迹给出的解析簇。如果 W 不包含经过 0 的解析超曲面, 那么，f,g 在 $\mathscr{O}_n$ 中必须互质; 如果 W 不包含直线 $\{z'=0\}$, 那么, 通过取线性组合, 我们可以假设 $\{f(z)=0\}$ 或者 $\{g(z)=0\}$ 都不包含 $\{z'=0\}$, 并且因此 f 和 g 是 z_n 中的 Weierstrass 多项式。设

$$\gamma=\alpha f+\beta g\neq 0\in\mathscr{O}_{n-1}$$

是 f 和 g 的结式。我们断定在投影映射 $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{n-1}$ 下 W 的像就是 γ 的轨迹。为此, 写出

$$\alpha = hg + r,$$

其中 r 的次数严格小于 g 的次数。那么,

$$\gamma = rf + (\beta + hf)g。$$

现在, 如果对 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的某些 z, γ 在 z 等于零, 但是 f 和 g 沿着 $\pi^{-1}(z)$ 没有公共零点, 于是断定, r 在 $\pi^{-1}(z)$ 中所有 g 的零点处等于零; 因为 $\deg(r) < \deg(g)$, 这意味着 r, 从而 $\beta + hf$, 在 $\pi^{-1}(z)$ 上恒等于零。因此, r 和 $\beta + hf$ 在除了 $\pi(W)$ 以外的 γ 的零点轨迹的任意分量的逆像上都等于零; 但是 r 和 $\beta + hf$ 互质, 所以没有公共分量。于是我们得到, $\pi(W)$ 是在 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中原点的邻域上的解析超曲面, 并且, 重复我们的解析超曲面的讨论得到, W 到适当选择的 $(n-2)$ 维平面 $\mathbb{C}^{n-2}\subset\mathbb{C}^n$ 上的投影把 W 局域表示为 $\mathbb{C}^{n-2}$ 中原点邻域的有限叶分支覆盖。

3. 最后, 设 $V\subset U\subset\mathbb{C}^n$ 是在 $0\in V$ 处不可约的解析簇, 适当对 $\mathbb{C}^n$ 中 0 的任意小邻域, $\pi(V\cap\Delta)$ 包含 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中 0 的邻域。在 0 附近写出

$$V = \{f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}。$$

那么函数 $f_i\in\mathscr{O}_n$ 必须都有 $\mathscr{O}_n$ 中的一个公共因子, 因为否则 V 就包含在两个互质函数的公共轨迹中, 由断言 2, $\pi(V\cap\Delta)$ 将是 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的真解析子簇。如果我们设 $g(z)$ 是 f_i 的最大公除子, 那么我们可以写出

$$V = \{g(z)=0\}\cup\left\{\frac{f_1(z)}{g(z)} = \cdots = \frac{f_k(z)}{g(z)} = 0\right\}。$$

因为 V 在 0 处不可约, 因为轨迹 $\{f_i(z)/g(z)=0, \text{对所有 } i\}$ 不能包含 $\{g(z)=0\}$, 于是我们必然得到

$$V = \{g(z)=0\},$$

即, V 是 0 附近的解析超曲面。

上述结果 1, 2 和 3 与我们解析超曲面基本图像一起, 给了我们一个解析簇局域性质的一个图像, 即, 局域上被一或两个全纯函数切出来。实际上, 同样的图像对一般解析簇在几乎所有方面都有效, 但是, 证明它们需要多复变函数理论一些相对深奥的技术。因为本书知识的基本着眼点是余维数为 1 的情形, 所以我们在这里陈述而不证明一般解析簇的离散结果:

1. 如果 $V\subset U\subset\mathbb{C}^n$ 是任意解析簇且 $p\in V$, 那么,在 p 的某些邻域中, V 可以唯一写作在 p 处不可约的解析簇 V_i 的并, 并且 $V_i\not\subset V_j$。

2. 任意解析簇可以被投影映射局域表示为在 Δ 的解析超曲面上分支的多圆盘 Δ 的有限叶覆盖。

3.如果 $V \subset \mathbb{C}^n$ 不包含直线 $z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0$, 那么, 在投影映射 $\pi : (z_1, \cdots, z_n) \to (z_1, \cdots, z_{n-1})$ 下, V 中 0 的邻域的像是 $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ 的邻域中的解析子簇。

证明这些结果的困难更多在于技术而不是概念。例如, 为了证明断言 3, 注意, 如果 V 由函数 $f_1, \cdots, f_k$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 附近给出, 那么, 由 f_i 的所有互质线性组合对的结式, $\pi(V)$ 被定义在 $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ 的邻域中。那么问题是证明在多圆盘中全纯函数的任意集合的零点轨迹实际上由在略小的多圆盘中有限个全纯函数给出。承认了断言 3, 1 和 2 不难通过一系列投影来证明。

所有这些结果都来自真投影定理, 我们将在下节陈述并在第三章证明。

最后, 多复变函数理论的几个更基本的结果在第五章用留数方法来证明。

2. 复流形

复流形

定义: 复流形 M 是一个可微流形, 它容许一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和坐标映射 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ 使得对所有的 α, β, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 在 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$ 是全纯的。

开集 $U \subset M$ 上的函数是全纯的, 如果对所有 α, $f \cdot \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ 上是全纯的。同样, $U \subset M$ 上的函数的集合 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 称为全纯坐标系, 如果对每个 α, $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ 和 $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 分别在 $z(U \cap U_\alpha)$ 和 $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ 上是全纯的; 复流形的映射 $f : M \to N$ 是全纯的, 如果它由全纯函数用 N 上局域全纯坐标的方式给出。

例子

1. 一维复流形称为*Riemann* 曲面。

2. 设 $\mathbb{P}^n$ 表示经过 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中直线的集合。直线 $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 由任意 $Z \neq 0 \in l$ 确定, 所以我们可以写出

$$\mathbb{P}^n = \frac{\{[Z] \neq 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\}}{[Z] \sim [\lambda Z]}。$$

在不包含在超平面 $(Z_i = 0)$ 中的直线的子集 $U_i = \{[Z] : Z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ 上, 有一个由下式给出的到 $\mathbb{C}^n$ 的双射 φ_i:

$$\varphi_i([Z_0, \cdots, Z_n]) = \left(\frac{Z_0}{Z_i}, \cdots, \frac{\hat{Z}_i}{Z_i}, \cdots, \frac{Z_n}{Z_i} \right)。$$

在 $(z_j \neq 0) = \varphi_i(U_j \cap U_i) \subset \mathbb{C}^n$ 上,

$$\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}(z_1, \cdots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \cdots, \frac{\hat{z}_j}{z_j}, \cdots, \frac{1}{z_j}, \cdots, \frac{z_n}{z_j} \right)$$

显然是全纯的; 因此, $\mathbb{P}^n$ 有复流形的结构, 称为复射影空间。"坐标" $Z = [Z_0, \cdots, Z_n]$ 称为 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标; 由映射 φ_i 给出的坐标称为欧氏坐标。 $\mathbb{P}^n$ 是紧致的, 因为我们有从 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中单位球到 $\mathbb{P}^n$ 的连续满射。注意, $\mathbb{P}^1$ 就是 Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$。

任意包含映射 $\mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ 诱导一个包含映射 $\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^n$; 这样映射的像称为 $\mathbb{P}^n$ 的线性子空间。 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中超平面的像仍称为超平面, 2 维平面 $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 的像称为直线, 并且, 一般地, $\mathbb{C}^{k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 的像称为 k 维平面。我们可以用这些术语说说 $\mathbb{P}^n$ 中点之间的线性关系: 例如, $\mathbb{P}^n$ 中点集 $\{p_i\}$ 的张开被取作由直线 $\pi^{-1}(p_i)$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中张开的子空间在 $\mathbb{P}^n$ 中的像; k 个点称为线性独立的, 如果它们在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中相应的直线线性独立, 即, 如果它们在 $\mathbb{P}^n$ 的张开是一个 $(k-1)$ 维平面。

注意, $\mathbb{P}^n$ 中超平面的集合对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上非零线性泛函的集合 $\mathbb{C}^{n+1*} - \{0\}$ 模标量因子; 因此它本身就是射影空间, 称为对偶射影空间, 表示为 $\mathbb{P}^{n*}$。

有时候, 把 $\mathbb{P}^n$ 看作添加无穷处的超平面而得到的 $\mathbb{C}^n$ 紧致化是有用的。在坐标中, 包含映射 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^n$ 是 $(z_1, \cdots, z_n) \to [1, z_1, \cdots, z_n]$; H 的方程为 $(Z_0 = 0)$, 通过把无穷远的超平面看作在 $\mathbb{C}^n$ 中我们可以到达无穷远的方向而得到等价 $H \cong \mathbb{P}^{n_1}$。

3. 设 $\Lambda = \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$ 是离散格子。那么, 商群 $\mathbb{C}^n/\Lambda$ 有通过投影映射 $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ 而诱导的复流形结构。它是紧致的, 当且仅当 $k = 2n$; 在这种情形下, $\mathbb{C}^n/\Lambda$ 称为复环面。

一般地, 如果 $\pi : M \to N$ 是拓扑覆盖空间且 N 是复流形, 那么 π 也给予 M 一个复流形结构; 如果 M 是复流形且 M 的格子变换是全纯的, 那么 N 从 M 继承了复流形结构。

这个构造的另一个例子是*Hopf* 曲面, 它定义为通过 $z \to 2z$ 生成的自同构群而得到的 $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ 的商。Hopf 曲面是不能嵌入到任何维数的射影空间的紧致复流形的最简单的例子。

设 M 是复流形, $p \in M$ 是任意点, $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 p 周围的全纯坐标系。我们现在叙述 p 处 M 的切空间的三种不同定义:

1. 我们可以把 M 看成 $2n$ 维实流形, $T_{\mathbb{R},p}(M)$ 是 p 处 M 的实切空间。 $T_{\mathbb{R},p}(M)$ 可以作为 p 的邻域上的实值 C^∞ 函数环上的 $\mathbb{R}$ 线性微商空间而得到; 如果我们写出 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$,

$$T_{\mathbb{R},p} = \mathbb{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}。$$

2. $T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 称为 p 处 M 的复化切空间。它可以作为 p 周围 M 上复值 C^∞ 函数环中的 $\mathbb{C}$ 线性微商空间而得到。我们可以写出

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C},p}(M) &= \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\} \\ &= \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right\}, \end{aligned}$$

其中, 象以前一样,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)。$$

3. $T'_p(M) = \mathbb{C}\{\partial/\partial z_i\} \subset T_{\mathbb{C},p}(M)$ 称为 p 处 M 的全纯切空间。它可以作为 $T_{\mathbb{C},p}(M)$ 的子空间而得到, 由在反全纯函数(即, 使得 $\bar{f}$ 全纯的 f)上等于零的微商组成, 所以不依赖于

全纯坐标系的选择。子空间 $T''_p(M)=\mathbb{C}\{\partial/\partial\bar{z}_i\}$ 称为 p 处 M 的**反全纯切空间**; 显然,

$$T_{\mathbb{C},p}(M)=T'_p(M)\oplus T''_p(M)。$$

观察得到, 对复流形 M, N, 任意 C^∞ 映射 $f:M\to N$ 诱导一个线性映射

$$f_*:T_{\mathbb{R},p}(M)\to T_{\mathbb{R},f(p)}(N),$$

并且因此诱导了映射

$$f_*:T_{\mathbb{C},p}(M)\to T_{\mathbb{C},f(p)}(N),$$

但是一般不能诱导出从 $T'_p(M)$ 到 $T'_{f(p)}(N)$ 的映射。实际上, 映射 $f:M\to N$ **是全纯的当且仅当**, 对所有 $p\in M$, 有

$$f_*(T'_p(M))\subset T'_{f(p)}(N)。$$

还要注意, 因为 $T_{\mathbb{C},p}(M)$ 作为实矢量空间 $T_{\mathbb{R},p}(M)$ 与 $\mathbb{C}$ 的张量化而自然得到, 所以把 $\partial/\partial z_i$ 变成 $\partial/\partial\bar{z}_i$ 的共轭算子有明确的定义, 并且

$$T''_p(M)=\overline{T'_p(M)}。$$

因此, 投影

$$T_{\mathbb{R},p}(M)\to T_{\mathbb{C},p}(M)\to T'_p(M)$$

是 $\mathbb{R}$ 线性同构。这最后的特性使得我们可以在纯粹的全纯切空间中"处理几何"。例如, 设 $z(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是复 z 平面中的光滑弧。那么, $z(t)=x(t)+\sqrt{-1}y(t)$, 并且, 弧的切线可以被取作

$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x}+y'(t)\frac{\partial}{\partial y}\quad T_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})\text{中},$$

或者

$$z'(t)\frac{\partial}{\partial z}\qquad T'(\mathbb{C})\text{中},$$

并且这两个在投影 $T_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})\to T'(\mathbb{C})$ 下对应。

现在, 设 M, N 是复流形, $z(z_1,\cdots,z_n)$ 是中心在 $p\in M$ 的全纯坐标, $w=(w_1,\cdots,w_m)$ 是中心在 $q\in N$ 的全纯坐标, $f:M\to N$ 是全纯映射, 满足 $f(p)=q$。与 p 处 M 的和 q 处 N 的各种切空间相对应, 我们得到 f 的*Jacobi* 矩阵的不同定义, 如下:

1. 如果我们写出 $z_i=x_i+\sqrt{-1}y_i$ 和 $w_\alpha=u_\alpha+\sqrt{-1}v_\alpha$, 那么, 采用 $T_{\mathbb{R},p}(M)$ 和 $T_{\mathbb{R},q}(N)$ 的基 $\{\partial/\partial x_i,\partial/\partial y_i\}$ 和 $\{\partial/\partial u_\alpha,\partial/\partial v_\alpha\}$ 的方式, 线性映射由下列 $2m\times 2n$ 矩阵给出:

$$\mathscr{I}_{\mathbb{R}}(f)=\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} & \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y_j}\\ \hline \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial x_j} & \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial y_j}\end{array}\right)。$$

用 $T_{\mathbb{C},p}(M)$ 和 $T_{\mathbb{C},q}(N)$ 的基 $\{\partial/\partial z_i,\partial/\partial\bar{z}_i\}$ 和 $\{\partial/\partial w_\alpha,\partial,/\partial\bar{w}_\alpha\}$ 的方式, f_* 由

$$\mathscr{I}_{\mathbb{C}}(f)=\begin{pmatrix}\mathscr{I}(f) & 0\\ 0 & \overline{\mathscr{I}(f)}\end{pmatrix},$$

其中,

$$\mathscr{I}(f)=\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j}\right)。$$

特别注意, $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}(f)$ 的秩 $=2\cdot\mathscr{I}(f)$ 的秩, 并且如果 $m=n$, 那么,

$$\begin{aligned}\det\mathscr{I}_{\mathbb{R}}(f) &= \det\mathscr{I}(f)\cdot\det\overline{\mathscr{I}(f)}\\ &= |\det\mathscr{I}(f)|^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

即, 全纯映射是保持定向的。我们把 $\mathbb{C}^n$ 上的自然定向取为由下列 $2n$ 形式给出:

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2(dz_1\wedge d\bar{z}_1)\wedge(dz_2\wedge d\bar{z}_2)\wedge\cdots\wedge(dz_n\wedge d\bar{z}_n)\\ &\qquad\qquad = dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n;\end{aligned}$$

显然, 如果 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}^n$, $\varphi_\beta:U_\beta\to\mathbb{C}^n$ 是复流形 M 上的全纯坐标映射, 那么由 $\mathbb{C}^n$ 上自然定向的 φ_α, φ_β 的拖回与 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上的一致。因此, 任意复流形有一个自然定向, 它在全纯映射下保持不变。

子流形和子簇

现在, 我们在全纯映射的各种 Jacobi 矩阵之中建立了关系, 不难证明,

逆函数定理: 设 U,V 是 $\mathbb{C}^n$ 中的空间, 且 $0\in U$, $f:U\to V$ 是全纯映射, 满足 $\mathscr{I}(f)=(\partial f_i/\partial z_j)$ 在 0 处非奇异。那么, f 在 0 的邻域中上一对一的, 并且 f^{-1} 在 $f(0)$ 处全纯。

证明: 首先, 因为在 0 处 $\det|\mathscr{I}_{\mathbb{R}}(f)|=|\det(\mathscr{I}(f))|^2\neq 0$, 由通常的逆函数定理, f 在 0 处有 C^∞ 逆函数 f^{-1}。现在, 我们得到

$$f^{-1}(f(z))=z,$$

所以,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}(f^{-1}(f(z)))\\ &= \sum_k\frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial\bar{z}_i}+\sum_k\frac{\partial f_j^{-1}}{\partial\bar{z}_k}\cdot\frac{\partial\bar{f}_k}{\partial\bar{z}_i}\\ &= \sum_k\frac{\partial f_j^{-1}}{\partial\bar{z}_k}\cdot\overline{\left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\right)}\quad \text{对所有}i,j。\end{aligned}$$

因为 $(\partial f_k/\partial z_i)$ 是非奇异的, 这意味着对所有 j,k 有 $\partial f_j^{-1}/\partial\bar{z}_k=0$, 因此 f^{-1} 是全纯的。
证毕

类似地, 我们得到

隐函数定理: 给定 $f_1,\cdots,f_k\in\mathscr{O}_n$, 满足

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\neq 0,$$

那么, 存在函数 $w_1,\cdots,w_k\in\mathscr{O}_{n-k}$ 使得在 $\mathbb{C}^n$ 中的零点邻域中, 有

$$f_1(z)=\cdots=f_k(z)=0\Leftrightarrow z_i=w_i(z_{k+1},\cdots,z_n),\quad 1\leqslant i\leqslant k。$$

证明: 再次, 从 C^∞ 隐函数定理, 我们可以找到满足所要求性质的 C^∞ 函数 $w_1,\cdots,w_k$; 为了得到它们是全纯的, 对 $z=(z_{k+1},\cdots,z_n)$ $k+1\leqslant\alpha\leqslant n$, 我们写出

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial\bar z_\alpha}(f_j(w(z),z))\\ &= \frac{\partial f_j}{\partial\bar z_\alpha}(w(z),z)+\sum\frac{\partial w_l}{\partial\bar z_\alpha}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial w_l}(w(z),z)+\sum\frac{\partial\bar w_l}{\partial\bar z_\alpha}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial\bar w_l}(w(z),z)\\ &= \sum\frac{\partial w_l}{\partial\bar z_\alpha}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial w_l}(w(z),z)\\ &\Rightarrow \frac{\partial w_l}{\partial\bar z_\alpha}=0\quad\text{对所有}\alpha,l。\end{aligned}$$

证毕

全纯情况下一个特殊的性质如下:

命题: 如果 $f:U\to V$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中开集的一对一全纯映射, 那么, $|\mathscr{I}(f)|\neq0$, 即, f^{-1} 是全纯的。

证明: 我们用 n 上的归纳法来证明; $n=1$ 的情形是显然的。设 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 和 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 分别是 U 和 V 上的坐标, 假设 $\mathscr{I}(f)$ 在 $0\in U$ 的秩为 k; 那么, 我们可以假设矩阵 $((\partial f_i/\partial z_j)(0))_{0\leqslant i,j\leqslant k}$ 是非奇异的。设

$$\begin{aligned}z'_i &= f_i(z),\quad 1\leqslant i\leqslant k,\\ z'_\alpha &= z_\alpha,\qquad k+1\leqslant\alpha\leqslant n;\end{aligned}$$

由逆函数定理, $z'=(z'_1,\cdots,z'_n)$ 是 0 附近 U 的全纯坐标系。但是, 现在 f 把轨迹 $(z'_1=\cdots=z'_k=0)$ 一一映射到轨迹 $(w_1=\cdots=w_k=0)$ 上, 并且 $f|_{(z'_1,\cdots,z'_n)}$ 的 Jacobi 矩阵 $(\partial f_\alpha/\partial z'_\beta)$ 在 0 处是奇异的; 由归纳假设, $k=0$ 或者 $k=n$。那么我们得到, f 的 Jacobi 矩阵在它的行列式等于零的地方恒等于零, 即, f 把轨迹 $|\mathscr{I}(f)|=0$ 的每个连通分量映射到 V 中一个单点。因为 f 是一对一的, 并且全纯函数 $|\mathscr{I}(f)|$ 的零点轨迹如果不空就有正的维数, 因此 $|\mathscr{I}(f)|\neq0$。 证毕

注意, 这个命题在实的情形下不成立, 比如, $\mathbb{R}$ 上的映射 $t\mapsto t^3$ 是一对一的, 但没有一个 C^∞ 逆函数。

现在, 我们可以给出

定义: 复流形 M 的*复子流形* S 是子集 $S\subset M$, 它在局域上由秩 $\mathscr{I}(f)=k$ 的全纯函数集合 $f_1,\cdots,f_k$ 的零点给出, 或者由秩 $\mathscr{I}(f)=n-k$ 的映射 $f:U\to M$ 下 $\mathbb{C}^{n-k}$ 中开集 U 的像给出。

隐函数定理保证了定义的两个不同条件实际上是等价的, 并且子流形 S 自然有维数为 $n-k$ 的复流形结构。

定义: 复流形 M 的解析子簇 V 是一个子集, 它局域上由全纯函数的有限集合的零点给出。点 $p \in V$ 称为 V 的光滑点, 如果 V 是 p 附近 M 的子流形, 即, 如果 V 在 p 的邻域中由秩 $\mathscr{I}(f) = k$ 的全纯函数 $f_1, \cdots, f_k$ 给出; V 的光滑点的轨迹记为 V^*。点 $p \in V - V^*$ 称为 V 的奇异点; V 的奇异点的轨迹记为 V_s。如果 $V = V^*$, 即, 如果 V 是 M 的子流形, 那么 V 称为光滑的, 或非奇异的。

特别是, 如果 p 是用局域坐标 z 的方式由函数 f 给出的解析超曲面 $V \subset M$ 的点, 那么, 我们定义多重度 $\mathrm{mult}_p(V)$ 为 p 处 f 等于零的次数, 即, 使得所有偏微商

$$\frac{\partial^k f}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_k}}(p) = 0, \quad k \leqslant m - 1$$

的最大整数。

这里我们应该谈谈一个在代数几何中到处使用的术语: **一般**这个词。当我们讨论局域上用复流形或复流形的解析子簇表述的一族对象时, “族的一般元素有某些性质”的确切意思是“没有被包含在严格更小维数的子簇中的那些性质的族中对象的集合”。

一般地, 我们的族中的对象被怎样表述是清楚的。一个例外涉及到“ $\mathbb{P}^n$ 中的一般 k 维平面”: 直到有关 Grassmann 流形的那节, 我们——至少正式上——没有办法表述射影空间的线性子空间。挑剔的读者可以用“ $\mathbb{P}^n$ 中点的一般 $(k+1)$ 元组的线性张开” 来代替。

关于解析子簇, 有关基本的结果是

命题: V_s 被包含在不等于 V 的 M 的解析子簇中。

证明: 对 $p \in V$, 设 k 是最大整数, 使得在 p 的邻域 U 上存在 k 个全纯函数 $f_1, \cdots, f_k$——它们在 V 上等于零, 并且使得 $\mathscr{I}(f)$ 有在 V 上不处处奇异的一个 $k \times k$ 子式; 我们可以假设在 V 上 $|(\partial f_i / \partial z_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}| \not\equiv 0$。设 $U' \subset U$ 是 $|(\partial f_i / \partial z_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}| = 0$ 的轨迹, V' 是 $f_1 = \cdots = f_k = 0$ 的轨迹。那么, $V' = V \cap U$ 是 U' 的复子流形, 并且对任意在 V 上等于零的全纯函数 f, 在 V' 上的微分 $df \equiv 0$, 即, f 在 V' 上是常数。因此, 对 p 附近的 $q \in V'$, $V = V'$ 是 q 的邻域中的子流形, 并且所以 $V_s \subset (|(\partial f_i / \partial z_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}| = 0)$。 证毕

实际的情况是, V_s 是 M 的解析子簇——如果我们小心地选择 V 的局域定义函数 $f_1, \cdots, f_l$, V_s 将是 $\mathscr{I}(f)$ 的 $k \times k$ 子式的行列式的公共零点轨迹。但是为此, 我们只需要知道解析子簇的奇异轨迹相当小, 所以我们不再证明更强的断言。

这里我们再表述解析簇的有关结果:

命题: 解析簇 V 是不可约的当且仅当 V^* 是连通的。

证明: 在一方面是显然的: 如果 $V = V_1 \cup V_2$ 满足 $V_1, V_2 \subsetneq V$ 是解析簇, 那么 $(V_1 \cap V_2) \subset V_s$, 因此 V^* 是非连通的。

反过来一般难以证明; 因为我们只对解析超曲面利用它, 所以我们将在这种情况下证明它。假设 V^* 是不连通的, 并且设 $\{V_i\}$ 表示 V^* 的连通分量; 我们希望证明, $\overline{V}_i$ 是解析簇。设 $p \in \overline{V}_i$ 是任意点, f 是 p 附近 V 的定义函数, 并且 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 p 周围的局域坐标; 我们可以假设 f 是 z_n 中次数为 k 的 Weierstrass 多项式。写出

$$g = \alpha \cdot f + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial z_n}, \quad g \neq 0 \in \mathscr{O}_{n-1};$$

那么, 对 p 周围的圆盘 Δ 和 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的圆盘 Δ', 投影映射 $\pi:(z_1,\cdots,z_n)\mapsto(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 把 $V_i\cap(\Delta-(g=0))$ 表示为 $\Delta'-(g=0)$ 的覆盖空间。设 $\{w_\nu(z')\}$ 表示 $z'=(z_1,\cdots,z_{n-1})\in\Delta'-(g=0)$ 在 $\pi^{-1}(z')$ 中点的 z_n 坐标, 并且设 $\sigma_1(z'),\cdots,\sigma_k(z')$ 表示 w_ν 的初等对称函数。函数 σ_i 有明确的定义, 并且在 $\Delta'-(g=0)$ 上有界, 所以扩张到 Δ' 上; 函数

$$f_i(z)=z_n^k+\sigma_1(z')z_n^{k-1}+\cdots+\sigma_k(z')$$

因此在 p 的邻域中是全纯的, 并且正好在 $\overline{V}_i$ 上等于零。 证毕

我们把不可约解析簇 V 的维数取作复流形 V^* 的维数; 我们称一个一般解析簇的维数为 k, 如果它的所有不可约分量的维数为 k。

注意: 如果 $V\subset M$ 是复流形 M 的解析子簇, 那么, 我们可以在任意点 $p\in V$ 定义 V 的**切锥** $T_p(V)\subset T_p''(M)$ 如下: 如果 $V=(f=0)$ 是一个解析超曲面, 并且用中心在 p 处的 M 上全纯坐标 $z_1,\cdots,z_n$ 的方式, 我们写出

$$f(z_1,\cdots,z_n)=f_m(z_1,\cdots,z_n)+f_{m+1}(z_1,\cdots,z_n)+\cdots$$

满足 $f_k(z_1,\cdots,z_n)$ 是 $z_1,\cdots,z_n$ 中次数为 k 的齐次多项式, 那么, p 处 V 的切锥被取为 $T_p'(M)=\mathbb{C}\{\partial/\partial z_i\}$ 的子簇, 由下式定义:

$$\left\{\sum\alpha_i\frac{\partial}{\partial z_i}:f_m(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=0\right\}。$$

那么, 一般地, $p\in V$ 处子簇 $V\subset M$ 的切锥取作 p 处对 M 中包含 V 的所有局域解析超曲面的切锥的相交。如果 V 在 p 处是光滑的, 当然这就是 p 处 V 的切空间。

进一步几何化, 切锥 $T_p(V)\subset T_p'(M)$ 可以作为对所有弧 $\gamma:\Delta\to V\subset M$ 的 p 处切线的并集而得到。

在 p 处 M 中维数为 k 的子簇 V 的**多重度**, 表示为 $\mathrm{mult}_p(V)$, 在 p 周围 M 上的小坐标多圆盘中, 它被取作 V 到一般 k 维多圆盘上投影中叶的数目; 注意, p 是 V 的光滑点当且仅当 $\mathrm{mult}_p(V)=1$。一般地, 如果 $W\subset M$ 是不可约子簇, 那么我们定义**沿着 W 的 V 的多重度** $\mathrm{mult}_W(V)$ 直接为在 W 的一般点处 V 的多重度。

De Rham 和 Dolbeault 上同调

设 M 是可微流形。设 $A^p(M,\mathbb{R})$ 表示 M 上 p 次微分形式的空间, $Z^p(M,\mathbb{R})$ 表示 p 次闭形式的子空间。因为 $d^2=0$, 所以 $d(A^{p-1}(M,\mathbb{R}))\subset Z^p(M,\mathbb{R})$; 闭形式模恰当形式的商群

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R})=\frac{Z^p(M,\mathbb{R})}{dA^{p-1}(M,\mathbb{R})}$$

称为 M **的** *de Rham* **上同调群**。

用同样的方法, 我们可以设 $A^p(M)$ 和 $Z^p(M)$ 分别表示 M 上复值 p 形式和复值 p 闭形式的空间, 并且设

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M)=\frac{Z^p(M)}{dA^{p-1}(M)}$$

是相应的商; 显然,

$$H_{\mathrm{DR}}^{p}(M) = H_{\mathrm{DR}}^{p}(M, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}。$$

现在, 设 M 是复流形。由线性代数, 在每点 $z \in M$ 的 M 的余切空间的分解

$$T_{\mathbb{C},z}^{*}(M) = T_{z}^{*\prime}(M) \oplus T_{z}^{*\prime\prime}(M)$$

给出分解

$$\wedge^{n} T_{\mathbb{C},z}^{*}(M) = \bigoplus_{p+q=n} (\wedge^{p} T_{z}^{*\prime}(M) \otimes \wedge^{q} T_{z}^{*\prime\prime}(M))。$$

相应地, 我们可以写出

$$A^{n}(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M),$$

其中,

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^{n}(M) : \varphi(z) \in \wedge^{p} T_{z}^{*\prime}(M) \otimes \wedge^{q} T_{z}^{*\prime\prime}(M), \text{对所有} z \in M\}。$$

形式 $\varphi^{p,q}(M)$ 称为 (p,q) 型的。同样, 我们用 $\pi^{(p,q)}$ 表示投影映射

$$A^{*}(M) \to A^{p,q}(M),$$

使得对 $\varphi \in A^{*}(M)$,

$$\varphi = \sum \pi^{(p,q)} \varphi;$$

我们通常把 $\pi^{(p,q)}\varphi$ 写作 $\varphi^{(p,q)}$。

如果 $\varphi \in A^{p,q}(M)$, 那么, 对每个 $z \in M$, 有

$$d\varphi(z) \in (\wedge^{p} T^{*\prime}(M) \otimes \wedge^{q} T_{z}^{*\prime\prime}(M)) \wedge T_{\mathbb{C},z}^{*}(M),$$

即,

$$d\varphi \in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M)。$$

我们通过

$$\bar{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ d, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ d,$$

来定义算子

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : A^{p,q}(M) &\to A^{p,q+1}(M) \\ \partial : A^{p,q}(M) &\to A^{p+1,q}(M); \end{aligned}$$

因此, 我们有

$$d = \partial + \bar{\partial}。$$

用局域坐标 $z=(z_1,\cdots,z_m)$ 的方式, 形式 $\varphi\in A^n(M)$ 是 (p,q) 型的, 如果我们可以写出

$$\varphi(z)=\sum_{\substack{\#I=p\\ \#J=q}}\varphi_{IJ}dz_I\wedge d\bar{z}_J,$$

其中, 对每个多重指标 $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$,

$$dz_I=dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}。$$

那么算子 ∂ 和 $\bar\partial$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}\bar\partial\varphi(z) &= \sum_{I,J,j}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\varphi_{IJ}(z)d\bar{z}_j\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J,\\ \partial\varphi(z) &= \sum_{I,J,i}\frac{\partial}{\partial z_i}\varphi_{IJ}(z)dz_i\wedge dz_I\wedge d\bar{z}_J。\end{aligned}$$

特别是, 我们称一个 $(q,0)$ 型形式 φ 是全纯的, 如果 $\bar\partial\varphi=0$; 显然, 当且仅当 $\varphi_I(z)$ 全纯且

$$\varphi(z)=\sum_{\#I=q}\varphi_I(z)dz_I$$

时如此。

注意, 因为在全纯映射下分解 $T^*_{\mathbb{C},z}=T^{*\prime}_z\oplus T^{*\prime\prime}_z$ 保持不变, 所以就是分解 $A^*=\oplus A^{p,q}$。对复流形的全纯映射 $f:M\to N$,

$$f^*(A^{p,q}(N))\subset A^{p,q}(M)$$

并且

$$\bar\partial\circ f^*=f^*\circ\bar\partial\quad 在A^{p,q}(N)上。$$

设 $Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ 表示 (p,q) 型 $\bar\partial$ 闭形式空间。因为 $\partial^2/\partial\bar{z}_i\partial\bar{z}_j=\partial^2/\partial\bar{z}_j\partial\bar{z}_i$, 所以, 在 $A^{p,q}(M)$ 上,

$$\bar\partial^2=0,$$

并且我们得到

$$\bar\partial(A^{p,q}(M))\subset Z^{p,q+1}_{\bar\partial}(M);$$

因此, 我们把*Dolbeault* 上同调群定义为

$$H^{p,q}_{\bar\partial}=\frac{Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)}{\bar\partial(A^{p,q-1}(M))}。$$

特别注意, 如果 $f:M\to N$ 是复流形的全纯映射, 那么 f 诱导一个映射

$$f^*:H^{p,q}_{\bar\partial}(N)\to H^{p,q}_{\bar\partial}(M)。$$

通常的 Poincaré 引理—— $\mathbb{R}^n$ 上的每个闭形式是恰当的—— 保证了 de Rham 群在局域上平庸。类似地, 关于 Dolbeault 群的一个基本结果是

$\bar{\partial}$-Poincaré 引理: 对 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆柱 $\Delta = \Delta(r)$, 有

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Delta) = 0, \quad q \geqslant 1。$$

证明: 首先注意, 如果

$$\varphi - \sum_{\substack{\# I=p \\ \# J=q}} \varphi_{IJ} \cdot dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

是 $\bar{\partial}$ 闭形式, 那么, 形式

$$\varphi_I = \sum_{\# J=q} \varphi_{IJ} \cdot d\bar{z}_J \in A^{0,q}(\Delta)$$

也是闭的, 并且如果

$$\varphi_I = \bar{\partial}\eta_I,$$

那么,

$$\varphi = \pm\bar{\partial}\left(\sum_I dz_I \wedge \eta_I\right);$$

因此, 只需证明群 $H_{\bar{\partial}}^{0,q}(\Delta)$ 等于零。

我们首先证明, 如果 φ 是 $\Delta = \Delta(r)$ 上的 $\bar{\partial}$ 闭 $(0,q)$ 形式, 那么, 对 $s < r$, 我们可以找到 $\psi \in A^{0,q-1}(\Delta(s))$, 在 $\Delta(s)$ 中满足 $\bar{\partial}\psi = \varphi$。为此, 写出

$$\varphi = \sum \varphi_I d\bar{z}_I;$$

我们断言, 如果 $\varphi \equiv 0$ 模 $(d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_k)$——即, 如果对 $I \not\subset \{1, \cdots, k\}, \varphi_I \equiv 0$——那么, 我们可以找到 $\eta \in A^{0,q-1}(\Delta(s))$ 使得

$$\varphi - \bar{\partial}\eta \equiv 0 \text{ 模 } (d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_{k-1});$$

这显然是充分的。所以假设 $\varphi \equiv 0$ 模 $(d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_k)$ 并且设

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{I:k\in I} \varphi_I \cdot d\bar{z}_{I-\{k\}}, \\ \varphi_2 &= \sum_{I:k\notin I} \varphi_I \cdot d\bar{z}_I, \end{aligned}$$

使得 $\varphi = \varphi_1 \wedge d\bar{z}_k + \varphi_2$, 满足 $\varphi_2 \equiv 0$ 模 $(d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_{k-1})$。如果 $l > k$, $\bar{\partial}\varphi_2$ 不包含因子 $d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l$ 这项; 因为 $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\varphi_1 + \bar{\partial}\varphi_2 = 0$, 因此, 对 $l > k$ 和 $k \in I$ 的 I 得到

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\varphi_I = 0。$$

现在, 设

$$\eta = \sum_{I:k\in I} \eta_I d\bar{z}_{I-\{k\}},$$

其中,

$$\eta_I(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|w_k|\leqslant s_k} \varphi_I(z_1,\cdots,w_k,\cdots,z_n)\frac{dw_k\wedge d\bar{w}_k}{w_k-z_k}。$$

由第4(5)页的命题, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\eta_I(z) = \varphi_I(z),$$

并且对 $l>k$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\eta_I(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|w_k|\leqslant s_k} \frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\varphi_I(z_1,\cdots,w_k,\cdots,z_n)\frac{dw_k\wedge d\bar{w}_k}{w_k-z_k}\\ &= 0。\end{aligned}$$

因此, 正如我们希望的那样, 在 $\Delta(s)$ 中有

$$\varphi - \bar{\partial}\eta \equiv 0 模 (d\bar{z}_1,\cdots,d\bar{z}_{k-1})。$$

为了证明整个 $\bar{\partial}$-Poincaré 引理, 设 $\{r_i\}$ 是趋于 r 的单调升序列。由第一步, 我们可以找到 $\psi_k\in A^{0,q-1}(\Delta)$ 使得在 $\Delta(r_k)$ 中 $\bar{\partial}\psi_k=\varphi$——取满足 $\bar{\partial}\psi'_k=\varphi$ 的 $\psi'_k\in A^{0,q-1}(\Delta(r_{k+1}))$, ρ_k 是在 $\Delta(r_k)$ 中 $\equiv 1$ 的脉冲函数, 在 $\Delta(r_{k+1})$ 上有紧致支集, 并且设 $\psi_k=\rho_k\cdot\psi'_k$——问题是证明: 我们可以选择 $\{\psi_k\}$ 使得它们在紧致几何上适当地收敛。我们使用 q 上的归纳法。假设我们有如上的 ψ_k。在 $\Delta(r_{k+1})$ 中取 $\alpha\in A^{0,q-1}(\Delta)$, 满足 $\bar{\partial}\alpha=\varphi$; 那么,

$$\bar{\partial}(\psi_k-\alpha)=0 \quad 在\Delta(r_k)中,$$

并且, 如果 $q\geqslant 2$, 那么由归纳假设, 我们可以找到 $\beta\in A^{0,q-2}(\Delta)$, 满足

$$\bar{\partial}\beta=\psi_k-\alpha \quad 在\Delta(r_{k-1})中。$$

设

$$\psi_{k+1}=\alpha+\bar{\partial}\beta;$$

那么, 在 $\Delta(r_{k+1})$ 中 $\bar{\partial}\psi_{k+1}=\bar{\partial}\alpha=\varphi$, 并且

$$\psi_{k+1}=\psi_k \quad 在\Delta(r_{k-1})中。$$

因此, 用这种方法选定的序列 $\{\psi_k\}$ 在紧致支集上一致收敛。

仍然考虑 $q=1$ 的情况。再次, 假定 $\psi_k\in C^\infty(\Delta)$, 在 $\Delta(r_k)$ 中满足 $\bar{\partial}\psi_k=\varphi$, $\alpha\in C^\infty(\Delta)$ 在 $\Delta(r_{k+1})$ 中满足 $\bar{\partial}\alpha=\varphi$; 那么, $\psi_k-\alpha$ 是 $\Delta(r_k)$ 中的全纯函数, 并且因此在 $\mathbb{C}^n$ 中的原点有幂级数展开。截断整个级数就得到一个多项式 β, 满足

$$\sup_{\Delta(r_{k-1})} |(\psi_k-\alpha)-\beta| < \frac{1}{2^k},$$

并且设

$$\psi_{k+1} = \alpha + \beta。$$

那么, 在 $\Delta(r_{k+1})$ 中 $\bar{\partial}\psi_{k=1} = \bar{\partial}\alpha = \varphi$, $\psi_{k+1} - \psi_k$ 在 $\Delta(r_k)$ 中是全纯的, 并且

$$\sup_{\Delta(r_{k-1})} |\psi_{k+1} - \psi_k| < \frac{1}{2^k},$$

所以 $\psi = \lim \psi_k$ 存在且 $\bar{\partial}\psi = \varphi$。 证毕

注意, 证明对 $r = \infty$ 成立。

我们把它留下来给读者作为练习来证明, 用圆环的类似讨论和 Laurent 展开,

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Delta^{*k} \times \Delta^l) = 0 \quad 对 q \geqslant 1,$$

其中 Δ^* 是穿孔圆盘 $\Delta - \{0\}$。

复流形上的运算

设 M 是维数为 n 的复流形。对每个 $z \in M$, M 上的厄米度量由 z 处全纯切空间上的正定厄米内积给出:

$$(\quad,\quad)_z : T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)} \to \mathbb{C},$$

它对 z 是光滑的——即, 使得对 M 上的局域坐标 z, 函数

$$h_{ij}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)_z$$

是 C^∞ 的。用基 $\{dz_i \otimes d\bar{z}_j\}$ 的方式把

$$(T'_Z(M) \otimes \overline{T'_z(M)})^* = T^{*\prime}_Z(M) \otimes T^{*\prime\prime}_z(M)$$

写作 $(\quad,\quad)_z$, 那么, 厄米度量由下式给出:

$$ds^2 = \sum_{i,j} h_{ij}(z) dz_i \otimes d\bar{z}_j。$$

厄米度量的余标架是 $(1,0)$型形式 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 的 n 元组, 使得

$$ds^2 = \sum_i \varphi_i \otimes \overline{\varphi}_i,$$

即, 使得, 通过由 $T'_z(M)$ 上 $(\quad,\quad)_z$ 在 $T^{*\prime}_z$ 上诱导的内积的方式, $(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ 是 $T^{*\prime}_z$ 的正交基。从这个叙述, 显然, 余标架总在局域上存在: 我们可以通过把 Gram–Schmidt 过程应用到每个 z 处 $T^{*\prime}_z$ 的基 $(dz_1, \cdots, dz_n)$ 来构造出来。

复流形上的厄米内积的实部和虚部分别给出其下矢量空间上的普通内积和交错二次形式。因为我们有一个自然的 $\mathbb{R}$ 线性同构

$$T_{\mathbb{R},z}(M) \to T'_z(M),$$

我们得到, 对 M 上的厄米度量 ds^2,

$$\mathrm{Re}ds^2 : T_{\mathbb{R},z}(M) \otimes T_{\mathbb{R},z}(M) \to \mathbb{R}$$

是 M 上的*Riemann* 度量, 称为厄米度量的诱导 Riemann 度量。当我们谈论有厄米度量的复流形上的距离, 面积或体积时, 我们总是指诱导 Riemann 度量。

我们还得到, 因为二次形式

$$\mathrm{Im}ds^2 : T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes T_{\mathbb{R},p}(M) \to \mathbb{R}$$

是交错的, 所以它表示阶次为 2 的实微分形式; $\omega = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}ds^2$ 称为度量的伴随 $(1,1)$ 形式。

显然, 如果 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 是 ds^2 的余标架, 我们得到

$$\varphi_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i,$$

其中, α_i 和 β_i 是实微分形式; 那么,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\sum(\alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i)) \otimes (\sum(\alpha_i - \sqrt{-1}\beta_i)) \\ &= \sum_i(\alpha_i \otimes \alpha_i + \beta_i \otimes \beta_i) + \sqrt{-1}\sum_i(-\alpha_i \otimes \beta_i + \beta_i \otimes \alpha_i)。\end{aligned}$$

诱导度量由下式给出:

$$\mathrm{Re}ds^2 = \sum(\alpha_i \otimes \alpha_i + \beta_i \otimes \beta_i),$$

并且度量的伴随 $(1,1)$ 上由下式给出:

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2}\mathrm{Im}ds^2 \\ &= \sum \alpha_i \wedge \beta_i \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \varphi_i \wedge \overline{\varphi}_i。\end{aligned}$$

从最后的表达式得到, 度量 $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$ 可以直接从它的伴随 $(1,1)$ 形式 $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\sum \varphi_i \wedge \bar{\varphi}_i$ 重新得到。的确, M 上 $(1,1)$ 型的任意实微分形式 ω 在每个切空间 $T'_z(M)$ 上给出一个厄米形式 $H(\quad,\quad)$。形式 H 将是正定的——即将在 M 上诱导一个厄米度量——当且仅当对每个 $z \in M$ 和全纯切空间 $v \in T'_z(M)$, 有

$$\sqrt{-1} \cdot \langle \omega(z), v \wedge \bar{v} \rangle > 0。$$

这样的微分形式 ω 称为**正定 $(1,1)$ 形式**; 用 M 上局域全纯坐标 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 的方式, 形式 ω 是正定的, 如果

$$\omega(z) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j} h_{ij}(z) dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

对每个 z 满足 $H(z) = (h_{ij}(z))$ 是正定厄米矩阵。

如果 $S \subset M$ 是复子流形, 那么, 对 $z \in S$, 我们有自然包含映射

$$T'_z(S) \subset T'_z(M);$$

因此, M 上的厄米度量通过限制在 S 上诱导同样的度量。更一般地, 如果 $f : N \to M$ 是任意全纯映射, 使得对 $z \in N$,

$$f_* : T'_z(N) \to T'_{f(z)}(M)$$

是单射, 那么 M 上的度量通过设

$$\left(\frac{\partial}{\partial w_\alpha}, \frac{\partial}{\partial w_\beta}\right)_z = \left(f_*\frac{\partial}{\partial w_\alpha}, f_*\frac{\partial}{\partial w_\beta}\right)_{f(z)}。$$

诱导了 N 上的度量。

注意, 在这种情况下, 对小的 $U \subset N$, 我们总可以找到 $f(U) \subset M$ 上的余标架 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, 满足 $\varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_n \in \mathrm{Ker} f^* : T^*_{f(z)}(M) \to T^{*\prime}_z(N)$; 那么, $f^*\varphi_1, \cdots, f^*\varphi_k$ 对 N 上的诱导度量在 U 上形成一个余标架。因此, N 上伴随 $(1,1)$ 形式 ω_N 由下式给出:

$$\begin{aligned}\omega_N &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{k} f^*\varphi_i \wedge f^*\bar\varphi_i\\ &= f^*\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{k}\varphi_i \wedge \bar\varphi_i\right)\\ &= f^*\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \wedge \bar\varphi_j\right)\\ &= f^*\omega_M。\end{aligned}$$

即, N 上诱导度量的伴随 $(1,1)$ 形式是 M 上度量的伴随 $(1,1)$ 形式的拖回。

例子

1. 在 $\mathbb{C}^n$ 上, 厄米度量由

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dz_i \otimes d\bar z_i$$

给出, 称为欧氏或标准度量; 当然, 诱导 Riemann 度量是 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 上的度量。

2. 如果 $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ 是一个完整格子, 那么复环面 $\mathbb{C}^n/\Lambda$ 上的度量由

$$ds^2 = \sum dz_i \otimes d\bar z_i$$

给出, 也称为 $\mathbb{C}^n/\Lambda$ 上的欧氏度量。

3. 设 $Z_0, \cdots, Z_n$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的坐标, 用 $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ 表示标准投影映射。设 $U \subset \mathbb{P}^n$ 是开集, 并且 $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 是 U 的提升, 即, 满足 $\pi \circ Z = id$ 的全纯映射; 考虑微分形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial \log \|Z\|^2。$$

如果 $Z': U \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 是另一个提升, 那么,

$$Z' = f \cdot Z,$$

其中 f 是非零全纯函数, 使得

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|Z'\|^2 &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\log\|Z\|^2+\log f+\log\bar{f})\\ &= \omega+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\partial\bar{\partial}\log f-\bar{\partial}\partial\log\bar{f})\\ &= \omega。\end{aligned}$$

因此, ω 不依赖于提升的选择; 因为提升在局域上总是存在的, 所以 ω 是 $\mathbb{P}^n$ 上整体定义的微分形式。显然, ω 是 $(1,1)$ 型的。为了得到 ω 是正定的, 首先注意到酉群 $U(n+1)$ 可迁地作用在 $\mathbb{P}^n$ 上并且保持 ω 不变, 使得如果 ω 在一个点是正定的, 那么它处处正定。现在, 设 $\{w_i = Z_i/Z_0\}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上开集 $U_0(Z_0 \neq 0)$ 上的坐标, 并且利用 U_0 上的提升 $Z = (1, w_1, \cdots, w_n)$; 我们得到

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log(1+\sum w_i\bar{w}_i)\\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\left[\frac{\sum w_i d\bar{w}_i}{1+\sum w_i\bar{w}_i}\right]\\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left[\frac{\sum dw_i\wedge d\bar{w}_i}{1+\sum w_i\bar{w}_i}-\frac{(\sum\bar{w}_i dw_i)\wedge(\sum w_i d\bar{w}_i)}{(1+\sum w_i\bar{w}_i)^2}\right]。\end{aligned}$$

在点 $[1, 0, \cdots, 0]$ 处,

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum dw_i \wedge d\bar{w}_i > 0$$

因此, ω 定义了 $\mathbb{P}^n$ 上的度量, 称为*Fubini–Study* 度量。

Wirtinger 定理. 现在, 厄米度量的实部和虚部的相互关系给出了 Wirtinger 定理, 它表述了 Riemann 几何和厄米微分几何之间的另一个基本差别。设 M 是复流形, $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 M 上的局域坐标, 并且,

$$ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$$

是 M 上的厄米度量, 有伴随 $(1,1)$ 形式 ω。写出 $\varphi_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i$; 那么, M 的伴随 Riemann 度量是

$$\mathrm{Re}(ds^2) = \sum_{i,j} \alpha_i \otimes \alpha_i + \beta_i \otimes \beta_i,$$

并且伴随于 $\mathrm{Re}(ds^2)$ 的体积元由下式给出:

$$d\mu = \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n。$$

另一方面, 我们有

$$\omega = \sum \alpha_i \wedge \beta_i,$$

使得第 n 次外积

$$\begin{aligned}\omega^n &= n!\cdot\alpha_1\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\wedge\beta_n\\ &= n!\cdot d\mu。\end{aligned}$$

现在, 设 $S\subset M$ 是维数为 d 的复流形。就象我们已经看到的, 在 S 上由 ds^2 诱导的度量的伴随 $(1,1)$ 形式就是 $\omega|_S$, 把上述结果应用到 S 上的诱导度量, 我们得到,

Wirtinger 定理:

$$\mathrm{vol}(S)=\frac{1}{d!}\int_S\omega^d。$$

复流形 M 的复子流形 S 的体积可以表示为 M 上整体定义微分形式在 S 上的积分, 这个事实与实情形下很不一样。例如, 对 $\mathbb{R}^2$ 一条 C^∞ 弧,

$$t\mapsto(x(t),y(t))$$

弧的长度元由

$$(x'(t)^2+y'(t)^2)^{1/2}dt$$

给出, 一般地, 它不能拖回到 $\mathbb{R}^2$ 中的任意微分形式。

结束本节前, 我们谈论复流形 M 的解析子簇上的积分。为此, 在可能奇异的子簇 V 上我们把 M 上微分形式 φ 的积分定义为在 V 的光滑轨迹 V^* 上 φ 的积分。第一个要证明的结果是:

命题: *在有界区间中, V^* 是有限体积的。*

证明: 因为问题是局域的, 体积随度量的变大而增大, 所以只需对 $V\subset\mathbb{C}^n$ 的欧氏度量证明即可。假设 V 的维数为 k, 并且选择 $\mathbb{C}^n$ 上的坐标使得, 在 0 的邻域中, V 仅与每个 $(n-k)$ 维平面 $(z_1=z_2=\cdots=z_{i_k}=0)$ 相交于离散点。伴随于 $\mathbb{C}^n$ 上欧氏度量的 $(1,1)$ 形式为

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum dz_i\wedge d\bar z_i,$$

且因此对 $c=(\sqrt{-1}/2)^k(-1)^{k(k-1)/2}\cdot k!$,

$$\omega^k=c\cdot\sum_{\#I=k}dz_I\wedge d\bar z_I。$$

只需证明, 对 $I=\{1,\cdots,k\}$,

$$c\int_{V^*\cap\Delta}dz_I\wedge d\bar z_I<\infty,$$

其中, Δ 是原点周围的小多圆盘。但是投影映射

$$\begin{aligned}\pi &: V^*\to\mathbb{C}^k\\ &: (z_1,\cdots,z_n)\mapsto(z_1,\cdots,z_k)\end{aligned}$$

把 V^* 表示为 $\Delta' = \pi(\Delta)$ 的 d 叶分支覆盖, 因此,

$$c\int_{V^*\cap\Delta} dz_I \wedge d\bar{z}_I \leqslant d\cdot c\int_{\Delta'} dz_I \wedge d\bar{z}_I < \infty。$$

证毕

还要注意, 与 C^∞ 情形不同, 光滑函数零点轨迹的流形上点的集合——比如, $f(y) = (e^{-y^{-2}} - 1)\sin(1/y)$——不需要是有限面积的。

作为证明的推论, 我们得到, 对 $\overline{U}$ 紧致的任意 $U \subset M$ 和 $\varphi \in A^*(\overline{U})$, 有

$$\int_{V^*\cap U} \varphi < \infty。$$

一个显然但基本的观察是, 如果 V^* 的维数为 k, 那么, 对 p 或 $q > k$, $A^{p,q}(V^*) = 0$; 因此, 对任意形式 φ,

$$\int_V \varphi = \int_V \varphi^{(k,k)}。$$

我们现在证明

解析簇的 Stokes 定理: *设 M 是复流形, $V \subset M$ 是维数为 k 的解析子簇, 并且 φ 是次数为 $2k-1$ 次微分形式, 在 M 上有紧致支集, 那么,*

$$\int_V d\varphi = 0。$$

证明: 问题是局域的, 即, 只需证明, 对每个 $p \in V$, 存在 p 的一个邻域, 使得对任意 $\varphi \in A_c^{2k-1}(U)$, 有

$$\int_V d\varphi = 0。$$

对每个 $p \in V$, 我们可以找到一个坐标系 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 和 p 周围的一个多圆柱 Δ, 使得投影映射 $\pi : (z_1, \cdots, z_n) \to (z_1, \cdots, z_k)$ 把 $V \cap \Delta$ 表示为 $\Delta' = \pi(\Delta)$ 的分支覆盖, 在解析超曲面 $\Delta \subset \Delta'$ 上分支化。设 T_ε 是 Δ' 中 D 的 ε 邻域, 并且

$$V_\varepsilon = (V \cap \Delta) - \pi^{-1}(T_\varepsilon)。$$

对 $\varphi \in A_c^{2k-1}(\Delta)$,

$$\begin{aligned}\int_V d\varphi &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{V_\varepsilon} d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial V_\varepsilon} \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\pi^{-1}(T_\varepsilon)} \varphi。\end{aligned}$$

因此, 为了证明结果, 我们必须直接证明, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\partial\pi^{-1}(T_\varepsilon)$ 的体积 $\to 0$。但是, $\partial\pi^{-1}(T_\varepsilon)$ 是 ∂T_ε 的有限覆盖; 所以我们只需证明, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\mathrm{vol}(\partial T_\varepsilon) \to 0$。为此, 设 D_1

是 D 的奇异轨迹, D_2 为 D_1 的奇异轨迹, 等等; 设 T_ε^i 是 $\Delta - D_{i+1}$ 中 $D_i^* = D_i - D_{i+1}$ 的 ε 邻域。那么, D_i^* 是实维数 $\leqslant 2$ 的子流形, 在 $\Delta - D_{i+1}$ 中有有限的体积, 所以当 $\varepsilon \to 0$ 时, ∂T_ε^i 的体积趋于 0。但是, $\partial T_\varepsilon \subset \cup(\partial T_\varepsilon^i)$, 且因此当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\mathrm{vol}(\partial T_\varepsilon) \to 0$。 证毕

这个结果必然需要一个事实: 复解析子簇的奇异性只出现在实余维数为 2 中。它保证了, 解析簇上的积分与子流形上的积分是一样的; 可能更重要的是, 它使我们可以证明(第54(61)页): 紧致复流形的解析子簇在 $H_*(M, \mathbb{R})$ 中总定义一个同调类。

最后, 我们可以表述

真映射定理: *如果 M, N 是复流形, $f : M \to N$ 是一个全纯映射, 并且 $V \subset M$ 是一个解析簇, 使得 $f|_V$ 是真的, 那么, $f(V)$ 是 N 的解析子簇。*

证明在第三章第二节给出。

3. 层与上同调

起源: Mittag–Leffler 问题

设 S 是 Riemann 曲面, 不一定紧致, p 是 S 的一个点, 以 p 为中心有局域坐标 z。 p 处的主部是 Laurent 级数的极点部分 $\sum_{k=1}^n a_k z^{-k}$。如果 $\mathscr{O}_p$ 是 p 点周围全纯函数的局域环, $\mathscr{M}_p$ 是 p 周围亚纯函数的域, 那么, 主部就是商群 $\mathscr{M}_p/\mathscr{O}_p$ 的元素。*Mittag–Leffler*问, 在 S 上给定一个离散点集 $\{p_n\}$, 并且对每个 n 在 p_n 处给定一个主部, 那么, 是否存在 S 上的一个亚纯函数 f, 在 $\{p_n\}$ 外全纯, 而在 p_n 处的主部是给定的主部? 这个问题显然在局域上是平庸的, 所以问题是从局域到整体上的过渡。这里有两种方法——它们都得到上同调理论。

Čech: 用开集取 S 的一个覆盖 $\underline{U} = \{U_\alpha\}$, 使得每个 U_α 至多包含一个点 p_n, 并且设 f_α 是 U_α 上的亚纯函数, 并且是 U_α 上问题的解。设

$$f_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta \in \mathscr{O}(U_\alpha \cap U_\beta)。$$

在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 中, 我们得到

$$f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0。$$

问题的整体解等价于找到 $\{g_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)\}$, 使得

$$f_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha \qquad 在U_\alpha \cap U_\beta中:$$

给定这样的 g_α, $f = f_\alpha + g_\alpha$ 就是满足条件的整体定义的函数, 反之亦然。在 Čech 理论中,

$$\{\{f_{\alpha\beta}\} : f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0\} = Z^1(\underline{U}, \mathscr{O})$$

$$\{\{f_{\alpha\beta}\} : f_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha, \quad 某些\{g_\alpha\}\} = \delta C^0(\underline{U}, \mathscr{O}),$$

并且第一 *Čech* 上同调群

$$H^1(\underline{U}, \mathscr{O}) = \frac{Z^1(\underline{U}, \mathscr{O})}{B^1(\underline{U}, \mathscr{O})}$$

一般是解决问题的障碍。

Dolbeault: 像以前一样, 取 f_α 为 U_α 的局域解, 设 ρ_α 是脉冲函数, 在 $p_n \in U_\alpha$ 的邻域中等于 1, 并且有包含在 U_α 中的支集。那么,

$$\varphi = \sum_\alpha \bar{\partial}(\rho_\alpha f_\alpha)$$

是 S 上的 $\bar{\partial}$ 闭 C^∞ $(0,1)$ 形式(在 p_n 的邻域中 $\varphi \equiv 0$)。如果对 $\eta \in C^\infty(S)$, $\varphi = \bar{\partial}\eta$, 那么, 函数

$$f = \sum_\alpha \rho_a f_\alpha - \eta$$

满足问题的条件; 因此, 解决问题的障碍是在 $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(S)$。

层

给定一个拓扑空间 X, X 上的*层* $\mathscr{F}$ 是伴随于每个开集 $U \subset X$ 的群 $\mathscr{F}(U)$, 称为 U 上 $\mathscr{F}$ 的截面, 且对每对开集 $U \subset V$, 映射 $r_{V,U} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ 称为限制映射, 它满足

1. 对任意开集三元组 $U \subset V \subset W$,

$$r_{W,U} = r_{V,U} \cdot r_{W,V}。$$

利用这个关系, 我们可以无损地把 $r_{V,U}(\sigma)$ 写作 $\sigma|_U$。

2. 对任意开集对 $U, V \subset M$ 和截面 $\sigma \in \mathscr{F}(U)$, $\tau \in \mathscr{F}(V)$ 使得

$$\sigma|_{U\cap V} = \tau|_{U\cap V},$$

则存在截面 $\rho \in \mathscr{F}(U \cup V)$, 满足

$$\rho|_U = \sigma, \quad \rho|_V = \tau。$$

3. 如果 $\sigma \in \mathscr{F}(U \cup V)$ 和

$$\sigma|_U = \sigma|_V = 0,$$

那么, $\sigma = 0$。

符号约定: 下面是我们经常要遇到的层。在每个情况下, 限制映射都是前面的那个, 并且, 除非其它声明, 群是可加的。

1. 在任意 C^∞ 流形 M 上, 我们定义层 C^∞, C^*, $\mathscr{A}^p$, $\mathscr{Z}^p$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 如下:

$C^\infty(U) =$ U 上 C^∞ 函数,

$C^*(U) =$ U 上非零 C^∞ 函数的乘法群,

$\mathscr{A}^p(U) =$ U 上 C^∞ p 形式,

$\mathscr{Z}^p(U) =$ U 上 C^∞ p 闭形式,

$\mathbb{Z}(U)$, $\mathbb{Q}(U)$, $\mathbb{R}(U)$, $\mathbb{C}(U) =$ U 上局域常数的 $\mathbb{Z}-$, $\mathbb{Q}-$, $\mathbb{R}-$ 或 $\mathbb{C}-$ 值函数。

2. 如果 M 是复流形, $U \subset M$ 是 M 的解析子簇, $E \to M$ 是全纯矢量丛(定义见下面), 我们定义层 $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}^*$, Ω^p, $\mathscr{A}^{p,q}$, $\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{p,q}$, $\mathscr{I}_V$, $\mathscr{O}(E)$, 和 $\mathscr{A}^{p,q}(E)$ 如下:

$\mathscr{O}(U) =$ U 上全纯函数,

$\mathscr{O}^*(U) =$ U 上非零全纯函数的乘法群,

$\Omega^p(U) =$ U 上全纯 p 形式,

$\mathscr{A}^{p,q}(U) =$ U 上 C^∞ 的 (p,q) 型形式,

$\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{p,q}(U) =$ U 上 $\bar\partial$ 闭的 C^∞ 的 (p,q) 型形式,

$\mathscr{I}_V(U) =$ 在 $V \cap U$ 上等于零的 U 上的全纯函数,

$\mathscr{O}(E)(U) =$ U 上 E 的全纯截面,

$\mathscr{A}^{p,q}(E) =$ U 上 C^∞ E 值 (p,q) 形式。

3. 如果 M 还是复流形, 在开集 $U \subset M$ 的**亚纯函数** f 在局域上作为两个全纯函数的商给出——即, 对某些 U 的覆盖 $\{U_i\}$, $f|_{U_i} = g_i/h_i$, 其中, g_i, h_i 在 $\mathscr{O}(U_i)$ 中是互质的, 并且在 $\mathscr{O}(U_i \cap U_j)$ 中有 $g_ih_j = g_jh_i$。这个定义暗中利用了第9(10)页的命题。严格讲, 即使我们把 ∞ 看成一个值, 亚纯函数 f 也不是一个函数: 在 $g_i = h_i = 0$ 的点它没有定义。 M 上的亚纯函数层表示为 $\mathscr{M}$; 不恒等于零的亚纯函数的乘法层表示为 $\mathscr{M}^*$。

M 上**层的映射** $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}$ 由同态集合 $\{\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)\}_{U\subset M}$ 给出, 使得对 $U \subset V \subset M$, α_U 和 α_V 与限制映射可交换。映射 $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 的**核**就是层 $\mathrm{Ker}(\alpha)$, 它由 $\mathrm{Ker}(\alpha)(U) = \mathrm{Ker}(\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U))$ 给出; 容易验证, 这种定义实际上的确定义了一个层。 α 的余核不好定义: 如果我们设 $\mathrm{Coker}(\alpha)(U) = \mathscr{G}(U)/\alpha_U\mathscr{F}(U)$, 那么, Coker 不满足第31(35)页的定义。[此方面的基本的例子是在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上的层映射

$$\exp : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^*,$$

它把 $f \in \mathscr{O}(U)$ 变成 $e^{2\pi\sqrt{-1}f} \in \mathscr{O}^*(U)$。在 exp 下, 截面 $z \in \mathscr{O}^*(\mathbb{C} - \{0\})$ 不在 $\mathscr{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ 的像中, 但是它到任意可缩开集 $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$ 的限制是 $\mathscr{O}(U)$ 中的像。] 作为替代, 我们取 U 上余核层 $\mathrm{Coker}(\alpha)$ 的截面由 U 上的开集覆盖 $\{U_\alpha\}$ 与截面 $\sigma_\alpha \in \mathscr{G}(U_\alpha)$ 一起给出, 使得对所有的 α β,

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} - \sigma_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} \in \alpha_{U_\alpha\cap U_\beta}(\mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta));$$

我们认为这两个集合 $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ 和 $\{(U'_\alpha, \sigma'_\alpha)\}$ 是等价的, 如果对所有的 $p \in U$ 和 $U_\alpha, U'_\beta \ni p$, 存在 V 与 $p \in V \subset (U_\alpha \cap U'_\beta)$, 使得 $\sigma'_\alpha|_V - \sigma'_\beta|_V \in \alpha_V(\mathscr{F}(V))$。

我们称一个层映射序列

$$0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{G} \to 0$$

是**恰当的**, 如果 $\mathscr{E} = \mathrm{Ker}(\beta)$ 且 $\mathscr{G} = \mathrm{Coker}(\alpha)$; 在这种情况下, 我们也称 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{F}$ 的**子层**, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 对 $\mathscr{E}$ 的**商层**, 写作 $\mathscr{F}/\mathscr{E}$。更一般地, 我们称一个序列

$$\cdots \to \mathscr{F}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathscr{F}_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \mathscr{F}_{n+2} \to \cdots$$

是恰当的, 如果 $\alpha_{n+1} \circ \alpha_n = 0$ 且对每个 n,

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha_n) \to \mathscr{F}_n \to \mathrm{Ker}(\alpha_{n+1}) \to 0$$

是恰当的。注意, 由我们的 Coker 的定义, 这不意味着对所有 U,

$$0 \to \mathscr{E}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathscr{G}(U) \to 0$$

是恰当的; 它却意味着对所有 U, 这个序列的前两个阶段是恰当的, 并且, 对任意截面 $\sigma \in \mathscr{G}(U)$ 和任意点 $p \in U$, 存在 U 中 p 点的邻域 V, 使得 $\sigma|_V$ 是在 β_V 的像中。

注记: 如果 $M \subset N$ 是一个子空间, $\mathscr{F}$ 是 M 上的层, 那么, 我们可以"用零扩张 $\mathscr{F}$"来得到 N 上的层 $\tilde{\mathscr{F}}$, 设

$$\tilde{\mathscr{F}}(U) = \mathscr{F}(U \cap M)$$

并设限制映射是前面的那个。因此, 我们可以把 $\mathscr{F}$ 看作 M 或 N 上的层。

例子

1. 在任意复流形上, 序列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^* \to 0$$

是恰当的, 其中 i 明显是包含映射, exp 是指数映射 $\exp(f) = e^{2\pi\sqrt{-1}f}$。这个基本序列称为*指数层序列*。

2. 如果 M 是复流形, $V \subset M$ 是复子流形, 通过用零扩张, 层 $\mathscr{O}_V$ 可以被看作 M 上的层。那么, 序列

$$0 \to \mathscr{I}_V \xrightarrow{i} \mathscr{O}_M \xrightarrow{r} \mathscr{O}_V \to 0$$

是恰当的, 其中 i 是包含映射和 r 是限制映射。

3. 由通常的 Poincaré 引理, 序列

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{C}^\infty \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^2 \to \cdots$$

在任意实流形上是恰当的。

4. 由 $\bar{\partial}$-Poincaré 引理, 序列

$$0 \to \Omega^p \to \mathscr{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{p,2} \to \cdots$$

在任意复流形上是恰当的。

5. 如果 M 是 Riemann 流形, 我们设 $\mathscr{P\!P}$ 是通过子层 $\mathscr{O} \xrightarrow{i} \mathscr{M}$ 得到的层 $\mathscr{M}$ 的商层, 那么, 对开集 $U \subset M$,

$$\mathscr{P\!P}(U) = \{(p_n, f_n)\} : \begin{cases} \{p_n\} \subset U \quad \text{离散的}, \\ f_n \in \mathscr{M}_{p_n}/\mathscr{O}_{p_n}; \end{cases}$$

即, 给定 U 上 $\mathscr{P\!P}$ 的一个截面与确定 U 的 Mittag-Leffler 问题的信息是一样的。

层上同调

设 $\mathscr{F}$ 是 M 上的层, 并且 $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ 是局域有限开覆盖。我们定义

$$\begin{aligned} C^0(\underline{U}, \mathscr{F}) &= \prod_{\alpha} \mathscr{F}(U_\alpha), \\ C^1(\underline{U}, \mathscr{F}) &= \prod_{\alpha \neq \beta} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta), \\ &\vdots \\ C^p(\underline{U}, \mathscr{F}) &= \prod_{\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \cdots \neq \alpha_p} \mathscr{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p})。 \end{aligned}$$

$C^p(\underline{U}, \mathscr{F})$ 的元素 $\sigma = \{\sigma_I \in \mathscr{F}(\cap U_{i_k})\}_{\#I=p+1}$ 称为 $\mathscr{F}$ 的 p-上链。我们由公式

$$(\delta\sigma)_{i_0,\cdots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sigma_{i_0,\cdots,\hat{i_j},\cdots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{ip}}$$

来定义上边缘算子

$$\delta : C^p(\underline{U}, \mathscr{F}) \to C^{p+1}(\underline{U}, \mathscr{F})。$$

特别是, 如果 $\sigma = \{\sigma_U\} \in C^0(\underline{U}, \mathscr{F})$, 那么

$$(\sigma\delta)_{U,V} = -\sigma_U + \sigma_V;$$

并且如果 $\sigma = \{\sigma_{U,V}\} \in C^1(\underline{U}, \mathscr{F})$, 那么(忽略限制)

$$(\delta\sigma)_{U,V,W} = \sigma_{UV} + \sigma_{VW} - \sigma_{UW}。$$

如果 $\delta\sigma = 0$, 那么 $p-$上链 $\sigma \in C^p(\underline{U}, \mathscr{F})$ 称为上闭链。注意, 任何上闭链 σ 必须满足反对称条件:

$$\sigma_{i_0,\cdots,i_p} = -\sigma_{i_0,\cdots,i_{q-1},i_{q+1},i_q,i_{q+2},\cdots,i_p}。$$

如果对某些 $\tau \in C^{p-1}(\underline{U}, \mathscr{F})$, 有 $\sigma = \delta\tau$, 那么, σ 称为上边缘。容易得到, $\delta^2 = 0$——即, 上边缘是上闭链——并且我们设

$$Z^p(\underline{U}, \mathscr{F}) = \mathrm{Ker}\delta \subset C^p(\underline{U}, \mathscr{F})$$

和

$$H^p(\underline{U}, \mathscr{F}) = \frac{Z^p(\underline{U}, \mathscr{F})}{\delta C^{p-1}(\underline{U}, \mathscr{F})}。$$

现在, 给定 M 的两个覆盖 $\underline{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 和 $\underline{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta\in I'}$, 如果对每个 $\beta \in I'$, 存在 $\alpha \in I$ 使得 $U'_\beta \subset U_\alpha$, 那么, 我们称 $\underline{U}'$ 是 $\underline{U}$ 的一个细分; 写作 $U' < U$。如果 $\underline{U}' < \underline{U}$, 我们可以选择一个映射 $\varphi : I' \to I$, 使得对所有 β 有 $U'_\beta \subset U_{\varphi\beta}$; 那么, 我们有映射

$$\rho_\varphi : C^p(\underline{U}, \mathscr{F}) \to C^p(\underline{U}', \mathscr{F}),$$

它由下式给出:

$$(\rho_\varphi \sigma)_{\beta_0 \cdots \beta_p} = \sigma_{\varphi\beta_0 \cdots \varphi\beta_p}|_{U_{\beta_0} \cap \cdots \cap U_{\beta_p}}。$$

显然, $\delta \circ \rho_\varphi = \rho_\varphi \circ \delta$, 并且因此 ρ_φ 诱导出一个同态

$$\rho : H^p(\underline{U}, \mathscr{F}) \to H^p(\underline{U}', \mathscr{F}),$$

它不依赖于 φ 的选择。(读者可能希望验证, 伴随于两个包含相关 φ 和 ψ 的链映射 ρ_φ 和 ρ_ψ 是链同伦的, 因此在上同调上诱导出同样的映射。) 我们把 M 上 $\mathscr{F}$ 的第 p *Čech* 上同调群定义为当 $\underline{U}$ 变得越来越细分时 $H^p(\underline{U}, \mathscr{F})$ 的方向极限:

$$H^p(M, \mathscr{F}) = \xrightarrow[\underline{U}]{\lim} H^p(\underline{U}, \mathscr{F})。$$

因为有可能引起混淆, 我们用 $\check{H}$ 表示 Čech 上同调群。显然, 对任意覆盖 $\underline{U}$,

$$H^0(M, \mathscr{F}) = H^0(\underline{U}, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(M)。$$

注意, 如果 $M \subset N$ 是闭子空间, $\mathscr{F}$ 是 M 上的任意层, 那么, 用零把 $\mathscr{F}$ 扩张到 N 上的层, 我们得到

$$H^*(M, \mathscr{F}) = H^*(N, \mathscr{F})。$$

作为方向极限的 $H^*(M, \mathscr{F})$ 的定义在实际应用中或多或少不能使用。需要

$$H^*(\underline{U}, \mathscr{F}) = H^*(M, \mathscr{F})$$

的覆盖 $\underline{U}$ 的一个简单的充分条件, 它由下面来证明:

Leray 定理: *如果在*

$$H^q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathscr{F}) = 0, \quad q > 0, 任意 i_1 \cdots i_p,$$

的意义上覆盖 $\underline{U}$ 对层 $\mathscr{F}$ 是非循环的, 那么, $H^*(\underline{U}, \mathscr{F}) \cong H^*(M, \mathscr{F})$。

我们将对要用到的那些情形来证明 Leray 定理。

层上同调最基本的性质是: 给定 M 上的一个层序列

$$0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{G} \to 0,$$

我们有与 δ 交换的映射

$$C^p(\underline{U}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\alpha} C^p(\underline{U}, \mathscr{F}), \quad C^p(\underline{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\beta} C^p(\underline{U}, \mathscr{G}),$$

并且因此诱导了映射

$$H^p(M, \mathscr{E}) \xrightarrow{\alpha^*} H^p(M, \mathscr{F}), \quad H^p(M, \mathscr{F}) \xrightarrow{\beta^*} H^p(M, \mathscr{G}),$$

我们接下来定义上边缘映射 $\delta^* : H^p(M,\mathscr{G}) \to H^{p+1}(M,\mathscr{E})$: 给定满足 $\delta\sigma = 0$ 的 $\sigma \in C^p(\underline{U},\mathscr{G})$, 我们总可以过渡到 $\underline{U}$ 的细分 $\underline{U}'$, 并且找到 $\tau \in C^p(\underline{U}',\mathscr{F})$ 使得 $\beta(\tau) = \rho\sigma$。那么, $\beta\delta\tau = \delta\beta\tau = \delta\rho\sigma = 0$, 因此通过过渡到更细分 $\underline{U}''$, 我们可以找到 $\mu \in C^{p+1}(\underline{U}'',\mathscr{E})$ 使得 $\alpha\mu = \delta\tau$; $\alpha\delta\mu = \delta\alpha\mu = \delta^2\tau = 0$, 并且因为 α 是单射, 这意味着 $\delta\mu = 0$。因此, $\mu \in Z^{p+1}(\underline{U}'',\mathscr{E})$ 并且我们取 $\delta^*\sigma = M \in H^{p+1}(M,\mathscr{E})$。

基本结果: 下面的序列是确恰当的:

$$\begin{array}{llll} 0 & \to H^0(M,\mathscr{E}) \to H^0(M,\mathscr{F}) \to H^0(M,\mathscr{G}) & \\ & \to H^1(M,\mathscr{E}) \to H^1(M,\mathscr{F}) \to H^1(M,\mathscr{G}) & \to \cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\vdots & \\ & \to H^p(M,\mathscr{E}) \to H^p(M,\mathscr{F}) \to H^p(M,\mathscr{G}) & \to \cdots \end{array}$$

对实际上自然出现的大多数恰当序列 $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$——并且当然我们在本书中将讨论所有的层——的确存在任意精细覆盖 $\underline{U}$, 使得对每个空间 $U = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$, 序列

$$0 \to \mathscr{E}(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to 0$$

是恰当的。因此, 我们可以找到 M 的任意精细覆盖 $\underline{U}$, 对于它, 上链群形成一个恰当序列

$$0 \to C^p(\underline{U},\mathscr{E}) \to C^p(\underline{U},\mathscr{F}) \to C^p(\underline{U},\mathscr{G}) \to 0。$$

在这种情形下, 我们的基本结果容易验证: 例如, 为了得到

$$H^p(\underline{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\beta^*} H^p(\underline{U},\mathscr{G}) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(\underline{U},\mathscr{G})$$

是恰当的, 设 $\sigma \in C^p(\underline{U},\mathscr{G})$ 在 $H^{p+1}(\underline{U},\mathscr{E})$ 中满足 $\delta\sigma = 0$ 和 $\delta^*\sigma = 0$。那么, 存在 $\tau \in C^p(\underline{U},\mathscr{F})$ 使得 $\beta\tau = \sigma$, 和存在 $\mu \in C^{p+1}(\underline{U},\mathscr{F})$ 使得 $\alpha\mu = \delta\tau$; 由定义, 在 $H^{p+1}(\underline{U},\mathscr{E})$ 中 $\mu = \delta^*\sigma$, 所以对某些 $\nu \in C^p(\underline{U},\mathscr{E})$ 有 $\mu = \delta\nu$。那么, $\tau - \alpha\nu$ 是 $C^p(\underline{U},\mathscr{F})$ 中的上闭链, 满足 $\beta(\tau - \alpha\nu) = \beta\tau = \sigma$, 表明 $\sigma \in \beta^*(H^p(\underline{U},\mathscr{F}))$。反之, 显然 $\delta^*\beta^* = 0$。剩下的步骤是类似的和简单的。

伴随于层序列

$$0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{G} \to 0$$

的恰当上同调序列最普通的应用就是回答这样的问题: 给定 $\mathscr{G}$ 的一个整体截面 σ, 什么时候 σ 是 $\mathscr{F}$ 整体截面在 β 下的像? 按照恰当上同调序列, 答案是, 正好是当在 $H^1(M,\mathscr{E})$ 中 $\delta^*\sigma = 0$ 时。

例如, 我们再次考虑 Riemann 曲面 M 上的恰当序列

$$0 \to \mathscr{O} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{M} \xrightarrow{\beta} \mathscr{P}\mathscr{P} \to 0。$$

Mittag-Leffler 问题的信息组成了整体截面 $g \in \mathscr{P}\mathscr{P}(M) = H^0(M,\mathscr{P}\mathscr{P})$; 问题是, 对某些整体亚纯函数 f, 是否 $g = \beta^* f$。如果 $\{f_U\}$ 是问题的局域解, 我们已经得到

$$(\delta^* g)_{U,V} = f_V - f_U$$

且 $g=\alpha^* f$ 当且仅当在 $H^1(M,\mathscr{O})$ 中 $\delta^* g=0$。

严格讲, 我们将遇到三种类型的层:

1.全纯层——诸如 $\mathscr{O}$, $\mathscr{I}_V$, $\mathscr{O}(E)$ 和 Ω^p——它的截面在局域上由全纯函数的 n 元组给出。对我们而言, 它们包含大部分信息, 并且是有意义的主要部分。

2. C^∞ 层, 诸如 $\mathscr{A}^{p,q}$, 它的局域截面可以表示为 C^∞ 函数的 n 元组。它们一般在辅助情况中使用。

3. 常数层, 诸如 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$。就象我们将看到的, 它们包含其下流形的拓扑信息。

对后两种层, 进行两个考察:

1. 对 $p>0$, 有 $H^p(M,\mathscr{A}^{r,s})=0$。

证明: 给定 M 的任意局域有限覆盖 $\underline{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 我们可以找到从属于 $\underline{U}$ 的单位分解, 即, M 上的 C^∞ 函数 ρ_α 使得 $\sum\rho_\alpha\equiv 1$ 和支集 $(\rho_\alpha)\subset U_\alpha$。现在, 给定 $\sigma\in Z^p(U,\mathscr{A}^{r,s})$, 我们由设

$$\tau_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}=\sum_{\beta\in I}\rho_\beta\alpha_{\beta,\alpha_0,\cdots,\alpha_{p-1}}$$

来定义 $\tau\in C^{p-1}(\underline{U},\mathscr{A}^{r,s})$, 其中, 截面 $\rho_\beta\alpha_{\beta,\alpha_0,\cdots,\alpha_{p-1}}$ 用零扩张到 $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{p-1}}$。来验证 $\delta\tau=\sigma$。在 $p=1$ 时, 显然:

$$\sigma=\{\sigma_{UV}\in\mathscr{A}^{r,s}(U\cap V)\};$$

$$\sigma_{UV}+\sigma_{VW}+\sigma_{WU}=0\quad 在U\cap V\cap W中。$$

设 $\tau_U=\sum_V\rho_V\sigma_{UV}$; 那么,

$$\begin{aligned}(\delta\tau)_{UV} &= -\tau_U+\tau_v\\ &= -\sum_W\rho_W\sigma_{WU}+\sum_W\rho_W\sigma_{WV}\\ &= \sum_W\rho_W\sigma_{UV}=\sigma_{UV}。\end{aligned}$$

一般地, 允许单位分解的层[更确切地说, 对任意 $U=\cup U_\alpha$, 映射 $\eta_\alpha:\mathscr{F}(U_\alpha)\to\mathscr{F}(U)$ 使得 $(\eta_\alpha\sigma)$ 被包含在 U_α 中, 并且对 $\sigma\in\mathscr{F}(U)$ 有 $\sum\eta_\alpha(\sigma|_{U_\alpha})=\sigma$] 被称为好层, 同样的讨论证明它们的更高的上同调群等于零。

2. 对于拓扑流形 M 上的单纯复形 K, 有

$$H^*(K,\mathbb{Z})\cong\check{H}^*(M,\mathbb{Z}),$$

即, M 上常数层的 *Čech* 上同调同构于复形 K 的单纯上同调。为此, 对 K 中的每个顶点 ν_α 伴随有一个开集 $\mathrm{St}(\nu_\alpha)$, 称为 ν_α 的星形, 它是 K 中顶点为 ν_α 的所有单纯复形的并集的内部。$\underline{U}=\{U_\alpha=\mathrm{St}(\nu_\alpha)\}$ 是 M 的开覆盖。$\cap_{i-0}^p\mathrm{St}(\nu_{\alpha_i})$ 是非空和连通的, 如果在我们的分解中 $\nu_{\alpha_0}\cdots,\nu_{\alpha_p}$ 是 p 单纯形的顶点; 否则, 它是空的。因此, 对每个 $(\alpha_0\cdots\alpha_p)$, 层 $\mathbb{Z}$ 的 p 上链 σ 伴随一个元素:

$$\sigma_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\in\mathbb{Z}(\cap\mathrm{St}(\nu_{\alpha_i}))=\begin{cases}\mathbb{Z} & 如果\ \nu_{\alpha_i}\ 张开一个\ p\ 单纯形,\\ 0 & 其它。\end{cases}$$

给定 $\sigma \in C^p(\underline{U}, \mathbb{Z})$, 对顶点为 $\nu_{\alpha_0} \cdots \nu_{\alpha_p}$ 的 p 单纯形 $\Delta = \langle \nu_{\alpha_0} \cdots \nu_{\alpha_p} \rangle$, 通过设

$$\sigma'(\Delta) = \sigma_{\alpha_0 \cdots \alpha_p},$$

我们得到单纯 p 上链 σ' 的定义。 $\sigma \mapsto \sigma'$ 给出一个 Abel 群同构

$$C^p(\underline{U}, \mathbb{Z}) \to C^p(K, \mathbb{Z}),$$

并且

$$\begin{aligned} \delta\sigma'(\langle \alpha_0 \cdots \alpha_{p+1} \rangle) &= \sum_i (-1)^{i+1} \sigma'(\langle \alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+1} \rangle) \\ &= (\delta\sigma)', \end{aligned}$$

使得我们得到一个链复形同构 $C^*(\underline{U}, \mathbb{Z}) \to C^*(K, \mathbb{Z})$, 从而得到同构 $H^*(\underline{U}, \mathbb{Z}) \to H^*(K, \mathbb{Z})$。因为我们可以把复形 K 再细分使得 M 的覆盖 $\underline{U}$ 任意细小而不改变 $H^*(K, \mathbb{Z})$, 最后我们得到,

$$\check{H}^*(M, \mathbb{Z}) \cong H^*(\underline{U}, \mathbb{Z}) \cong H^*(K, \mathbb{Z})。$$

De Rham 定理

设 M 为实 C^∞ 流形。 M 上的一个奇异 p 链由 M 的标准 p 单纯形 $\Delta \subset \mathbb{R}^p$ 的映射 $\Delta \xrightarrow{f_i} M$ 的形式上的线性组合 $\sum a_i f_i$ 给出。我们称其为分片光滑的, 如果映射 f_i 扩张到 M 上 Δ 的邻域上的 C^∞ 映射。设 $C_p^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z})$ 表示分片光滑的整数 p 链空间。显然, 分片光滑链的边缘也是分片光滑的, 所有 $C_*^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z})$ 形成 $C_*(M, \mathbb{Z})$ 的子复形, 我们可以设

$$\begin{aligned} Z_p^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z}) &= \mathrm{Ker}\partial : C_p^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z}) \to C_{p-1}^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z}) \\ H_p^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z}) &= \frac{Z_p^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z})}{\partial C_{p+1}^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z})}。\end{aligned}$$

由微分拓扑中的一个基本结果, 包含映射 $C_*^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z}) \to C_*(M, \mathbb{Z})$ 诱导出同构

$$H_p^{\mathrm{ps}}(M, \mathbb{Z}) \cong H_p(M, \mathbb{Z});$$

换句话说, $H_p(M, \mathbb{Z})$ 中的每个同调类可以用分片光滑 p 闭链来表示, 并且, 如果分片光滑 p 闭链在通常的意义上同调于 0, 那么存在分片光滑 $(p+1)$ 链 τ, 它满足 $\partial\tau = \sigma$ 。

现在, 设 $\varphi \in A^p(M)$ 是 C^∞ p 形式, 并且 $\sigma = \sum a_i f_i$ 是分片光滑 p 链; 我们得到

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \sigma \rangle &= \int_\sigma \varphi \\ &= \sum_i a_i \int_\Delta f_i^* \varphi。\end{aligned}$$

如果 φ 是闭形式, 那么, 对 $(p+1)$ 链 τ 的边缘 σ, 由 Stokes 定理得到,

$$\int_\sigma \varphi = \int_\tau d\varphi = 0,$$

使得 φ 定义了一个实值奇异 p 上闭链。再次由 Stokes 定理, 对闭链 σ 和任意 $\eta \in A^{p-1}(M)$, 我们得到

$$\int_\sigma \varphi = \int_\sigma \varphi + d\eta;$$

因此得到一个映射

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) \to H^*_{\mathrm{sing}}(M, \mathbb{R})。$$

de Rham 定理称, 这个映射实际上是一个同构。

De Rham 定理的原始证明, 本质上是先定义相对 de Rham 群, 再证明所得到的同调理论满足 Eilenberg 和 Steenrod 的公理。这里我们将给出简短的层论讨论, 它仅仅是后面 Dolbeault 定理的翻版——而不是那么几何上的。

首先, 因为任意微分流形 M 可以作为单纯复形 K 的内在拓扑空间而实现, 那么, 我们得到

$$H^*_{\mathrm{sing}}(M, \mathbb{R}) \cong H^*(K, \mathbb{R}) \cong \check{H}(M, \mathbb{R})。$$

接着, 由通常的 Poincaré 引理, M 上的层序列

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{A}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^2 \to \cdots$$

是恰当的; 换句话说, 序列

$$\begin{gathered} 0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{A}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{Z}^1 \to 0 \\ \vdots \\ 0 \to \mathscr{Z}^p_d \to \mathscr{A}^p \xrightarrow{d} \mathscr{Z}^{p+1} \to 0 \end{gathered}$$

都是恰当的。现在, 我们已经得到, 对 $q > 0$ 和任意 p,

$$H^q(M, \mathscr{A}^p) = 0;$$

由伴随于上述短恰当层序列的恰当上同调序列, 得到

$$\begin{aligned} \check{H}(M, \mathbb{R}) &\cong H^{p-1}(M, \mathscr{Z}^1) \\ &\cong H^{p-2}(M, \mathscr{Z}^2) \\ &\vdots \\ &\cong H^1(M, \mathscr{Z}^{p-1}) \\ &\cong \frac{H^0(M, \mathscr{Z}^p)}{\delta H^0(M, \mathscr{A}^{p-1})} \\ &= \frac{Z^p(M)}{dA^{p-1}(M)} \\ &= H^p_{\mathrm{DR}}(M)。 \end{aligned}$$

注意, de Rham 同构是函子的: 如果 $f: M \to N$ 是 C^∞ 流形的微分映射, φ 是在 de Rham 映射下表示 $[\varphi] \in H^p_{\text{sing}}(N, \mathbb{R})$ 的 N 上的闭 p 形式, 并且 $\sigma = \sum a_i f_i$ 是 M 上分片光滑 p 闭链, 那么,

$$\begin{aligned} \langle f^*\varphi, \sigma\rangle &= \sum_i a_i \int_\Delta f_i^* f^* \varphi \\ &= \langle \varphi, f_* \sigma\rangle, \end{aligned}$$

即, $f^*[\varphi] = [f^*\varphi]$。

Dolbeault 定理

在本节开头, 我们看到, 解决 Riemann 球面 S 上的 Mittag–Leffler 问题的障碍可以取在 $H^1(S, \mathscr{O})$ 或者 $H^{0,1}_{\bar\partial}(S)$ 中。实际上, 它表示了下列定理的一个特殊情形:

Dolbeault 定理: *对复流形 M, 有*

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(M)。$$

证明: 由 $\bar\partial$-Poincaré 引理, 对所有的 p 和 q, 序列

$$\begin{gathered} 0 \to \Omega^q \to \mathscr{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{Z}^{p,1}_{\bar\partial} \to 0 \\ \vdots \\ 0 \to \mathscr{Z}^{p,q}_{\bar\partial} \to \mathscr{A}^{p,q} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{Z}^{p,q+1}_{\bar\partial} \to 0 \end{gathered}$$

是恰当的。因为对 $r > 0$ 和所有 p, q有

$$H^r(M, \mathscr{A}^{p,q}) = 0,$$

所以, 伴随于这些层序列的长恰当上同调序列给出

$$\begin{aligned} H^q(M, \Omega^p) &\cong H^{q-1}(M, \mathscr{Z}^{p,1}_{\bar\partial}) \\ &\cong H^{q-2}(M, \mathscr{Z}^{p,2}_{\bar\partial}) \\ &\ \vdots \\ &\cong H^1(M, \mathscr{Z}^{p,q-1}_{\bar\partial}) \\ &\cong \frac{H^0(M, \mathscr{Z}^{p,q}_{\bar\partial})}{\bar\partial H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1})} \\ &= H^{p,q}_{\bar\partial}(M)。 \end{aligned}$$

证毕

作为一个应用, 我们证明 Leray 定理的一个特殊情形: 对 M 的一个局域有限覆盖 $\underline{U} = \{U_\alpha\}$——对结构层 $\mathscr{O}$ 它是非循环的, 即, 有这样的性质:

$$H^p(U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}, \mathscr{O}) = 0 \qquad 对 p > 0,$$

那么, 我们得到

$$H^*(\underline{U},\mathscr{O})\cong H^*(M,\mathscr{O})。$$

证明: 由假设, 我们得到

$$\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,r}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p})=\bar\partial\mathscr{A}^{0,r-1}(U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p});$$

即, 我们得到上链群的恰当序列

$$0\to C^p(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,r-1})\to C^p(\underline{U},\mathscr{A}^{0,r-1})\to C^p(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,r})\to 0,$$

由通常代数上的原因, 它给出恰当序列

$$\begin{aligned}\cdots\to H^p(\underline{U},\mathscr{A}^{0,r-1})\to H^p(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,r})\to H^{p+1}(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,r-1})\\ \to H^{p+1}(\underline{U},\mathscr{A}^{0,r-1})\to\cdots。\end{aligned}$$

因为由对单位分解的讨论, 对 $p>0$ 有 $H^p(\underline{U},\mathscr{A}^{0,r})=0$, 所以我们得到,

$$\begin{aligned}H^q(\underline{U},\mathscr{O})&\cong H^{q-1}(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,1})\\ &\cong H^{q-2}(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,2})\\ &\vdots\\ &\cong H^1(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,q-1})\\ &\cong \frac{H^0(\underline{U},\mathscr{Z}_{\bar\partial}^{0,q})}{\bar\partial H^0(\underline{U},\mathscr{A}^{0,q-1})}\\ &= H_{\bar\partial}^{0,q}(M)\cong H^q(M,\mathscr{O})。\end{aligned}$$

证毕

同样的讨论对层 Ω^p 也成立。

计算:

1. 第一个结果是, 如果 M 是 n 维复流形, 那么

$$H^q(M,\mathscr{O})\cong H_{\bar\partial}^{0,q}(M)=0\quad 对 q>n。$$

2. 由 $\bar\partial$–Poincaré 引理得到

$$H^q(\mathbb{C}^n,\mathscr{O})=0\quad 对 q>0,$$

并且更一般地得到

$$H^q((\mathbb{C})^k\times(\mathbb{C}^*)^l,\mathscr{O})=0\quad 对 q>0。$$

还有, 因为 $\mathbb{C}^n$ 是可收缩的, 所以我们得到,

$$H^q(\mathbb{C}^n,\mathbb{Z})=0\quad 对 q>0,$$

现在, 从伴随于 $\mathbb{C}^n$ 上指数层序列的长恰当上同调序列, 得到

$$H^q(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}) \to H^q(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}^*) \to H^{q+1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z})$$

是恰当的, 因此

$$H^q(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}^*) = 0 \quad \text{对} q > 0。$$

作为直接的结果, 我们有 $Cousin$ 问题的答案:

$\mathbb{C}^n$ 中的任意解析超曲面是一个整函数的零点轨迹。

证明: 我们已经知道, 在 $\mathbb{C}^n$ 中任意点 p 的邻域中, 解析超曲面 $V \subset \mathbb{C}^n$ 可以由全纯函数 f 的零点轨迹给出, 并且如果我们把 f 选择为不被 $\mathscr{O}_p$ 中任意非单位元的平方整除, 那么, 除了一个单位元因子外, f 就是整函数。因此我们可以找到 $\mathbb{C}^n$ 的一个覆盖 $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ 和函数 $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$, 使得轨迹 $(f_\alpha = 0) = V \cap U_\alpha$, 并且使得对任意 α 和 β, 有

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)。$$

但是因为 $H^1(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}^*) = 0$, 所以上闭链

$$\{g_{\alpha\beta}\} \in C^1(\underline{U}, \mathscr{O}^*)$$

是上边缘, 即, 在必要的覆盖细分之后, 存在一个上链

$$\{h_\alpha\} \in C^0(\underline{U}, \mathscr{O}^*),$$

使得

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}。$$

那么, 整函数

$$f = f_\alpha h_\alpha = f_\beta h_\beta$$

的零点轨迹正好是 V。 证毕

$H^q((\mathbb{C})^k \times (\mathbb{C}^*)^l, \mathscr{O}) = 0$ 的另一个应用就是, 由平面和穿孔平面的乘积给出的复流形的覆盖是非循环的, 这是我们在接下来的两个计算中要使用的结果。

3. 为了计算上同调群 $H^q(\mathbb{P}^1, \mathscr{O})$, 在 $\mathbb{P}^1$ 上取欧氏坐标 u 和 $v = 1/u$, 并且设 $U = (v \neq 0)$, $V = (u \neq 0)$。由坐标 u 和 v, U 和 V 分别对 $\mathbb{C}$ 是双全纯的, 并且 $U \cap V = \mathbb{C}^*$; 因此, $\mathbb{P}^1$ 的覆盖 $\{U, V\}$ 是非循环的。现在, 有

$$C^0(\{U, V\}, \mathscr{O}) = \{(f, g) : f \in \mathscr{O}(U),\ g \in \mathscr{O}(V)\}$$

和

$$C^1(\{U, V\}, \mathscr{O}) = \{h \in \mathscr{O}(U \cap V)\}。$$

给定 $(f,g)\in C^0(\{U,V\},\mathscr{O})$, 我们可以写出

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nu^n,\quad g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nv^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nu^{-n}。$$

因此 $\delta((f,g))=-f+g\in\mathscr{O}(U\cap V)$ 等于零, 当且仅当对正的 n 有 $a_n=b_n=0$ 和 $a_0=b_0$, 即,

$$H^0(\mathbb{P}^1,\mathscr{O})\cong\mathbb{C},$$

或者换句话说, $\mathbb{P}^1$ 上的唯一整体全纯函数是常数。

一般地, 从最大值原理显然得到, 对任意紧致连通复流形有 $H^0(M,\mathscr{O})\cong\mathbb{C}$。

另一方面, 给定任意的

$$h=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nu^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nv^{-n}\in C^1(\{U,V\},\mathscr{O}),$$

我们可以写出

$$h=\delta((f,g)),$$

其中,

$$f=-\sum_{n=0}^{\infty}a_nu^n,\quad g=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}v^n,$$

并且由此得到

$$H^1(\mathbb{P}^1,\mathscr{O})=0。$$

类似地,

$$C^0(\{U,V\},\Omega^1)=\{(\omega,\eta):\omega\in\Omega^1(U),\eta\in\Omega^1(V)\}$$

的任意元素 (ω,η) 可以写作

$$\omega=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nu^n\right)du;\quad \eta=\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nv^n\right)dv=\left(-\sum_{n=0}^{\infty}b_nu^{-n-2}\right)du,$$

这是因为 $dv=d(u^{-1})=-u^{-2}du$。由此我们得到, $\delta((\omega,\eta))=0$, 当且仅当 $\omega=\eta=0$, 即,

$$H^0(\mathbb{P}^1,\Omega^1)=0。$$

由同样的记号, 元素

$$\nu=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nu^n\right)du\in C^1(\{U,V\},\Omega^1)=\Omega^1(U\cap V)$$

可表示为 $\delta((\omega,\eta))=-\omega+\eta$, 当且仅当 $a_{-1}=0$; 因此,

$$H^1(\mathbb{P}^1,\Omega^1)\cong\mathbb{C}。$$

用同样的方式, 读者可以验证, 一般地,

$$H^p(\mathbb{P}^n,\Omega^q)=\begin{cases}\mathbb{C} & 如果p=q\leqslant n,\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

这是我们后面用 Hodge 理论要证明的结果。

4. 设 $M=\mathbb{C}^2-\{0\}$。由 Hartogs 定理我们得到 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^2-\{0\})=\mathscr{O}(\mathbb{C}^2)$。取覆盖 $U_1=\{z_1\neq 0\}$, $U_2=\{z_2\neq 0\}$; 它也是一个非循环覆盖 $(U_1\cong U_2\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*;U_1\cap U_2\cong\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$。现在, $C^1(\{U_1,U_2\},\mathscr{O})=\mathscr{O}(U_1\cap U_2)$ 由下列 Laurent 级数组成:

$$f(z_1,z_2)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}a_{mn}z_1^mz_2^n;$$

$\mathscr{O}(U_1)$ 由下列级数组成:

$$f(z_1,z_2)=\sum_{m\geqslant 0}b_{mn}z_1^mz_2^n;$$

$\mathscr{O}(U_2)$ 由下列级数组成:

$$f(z_1,z_2)=\sum n\geqslant 0c_{mn}z_1^mz_2^n。$$

因此, $\delta C^0(\{U_1,U_2\}\mathscr{O})=\mathscr{O}(U_1)+\mathscr{O}(U_2)$ 不包含 $z_1^mz_2^n(m,n<0)$ 的项的 Laurent 级数; 我们得到 $\dim H^1(\mathbb{C}^2-\{0\},\mathscr{O})=\infty$。

4. 流形的拓扑

闭链的相交

考虑图 1 的标准环面 T 和两个 1 维闭链 A 和 B。直觉判断, 任意同调于 B 的 1 维闭链必然与同调于 A 的 1 维闭链相交, 而同调于 A 的闭链——例如 A'——可以与 A 不相交。这是 $H_1(T,\mathbb{Z})$ 中类 $\alpha=(A)$ 和 $\beta=(B)$ 的不变量, 我们将用公式来表示它。问题是, 代表 A 和 B 的闭链的相交点的数目是不确定的: 例如, 我们可以得到图 2 的任一种情况。需要一种方法来把 T 上两个闭链的相交点进行计数, 使得“多余的”相交互相抵消。为此如下进行: 首先选择 T 上的定向。那么, 如果 T 上的两个闭链 A 和 B 横截相交于点 p, 当对 A 和 B 的切矢量按顺序形成 $T_p(M)$ 的一个基时, 我们定义 p 处 A 和 B 的相交指标 $\iota_p(A\cdot B)$ 为 1, 反之为 -1; 我们定义横截相交在光滑点的闭链 A 和 B 的相交数 $^\#(A\cdot B)$ 为下列求和:

$$^\#(A\cdot B)=\sum_{p\in A\cap B}\iota_p(A\cdot B)。$$

不难得到, $^\#(A\cdot B)$ 只依赖于 A 和 B 的同调类: 如果 A 同调于零——即, 如果 A 是区域 $C_i\subset T$ 的边界, 且 A 的切矢量和 ∂C_i 的向里的法矢量总形成 $T(M)$ 的定向基——那么, 路径 B 在进入区域 C_i 时与 A 正向相交, 出来时与 A 负向相交; 因此得到,

$$^\#(A\cdot B)=0,$$

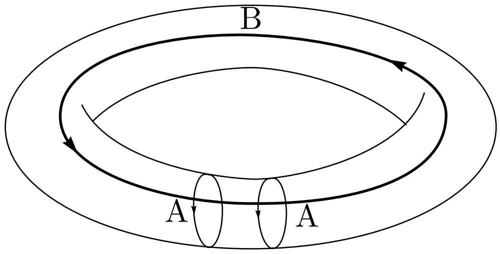
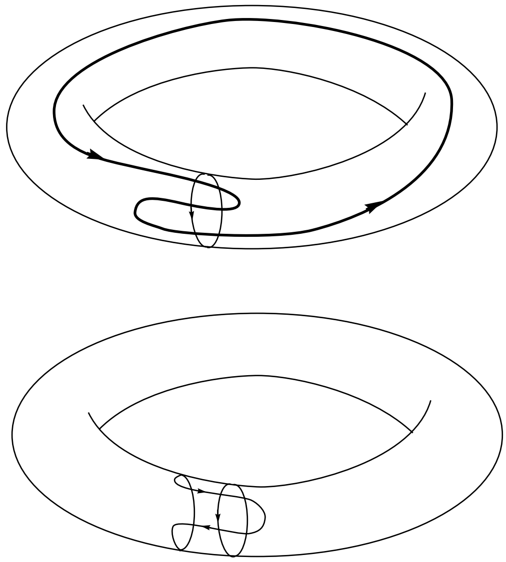


Figure 1


Figure 2

并且一般地, 因为相交数对每个因子是线性的, 如果 $A \sim A'$, 那么

$$^{\#}(A' \cdot B) = {}^{\#}(A \cdot B)。$$

最后, 因为对任意两个同调类 $\alpha, \beta \in H_1(T, \mathbb{Z})$, 我们可以找到表示 α 和 β 并横截相交的 T 上的闭链 A 和 B, 我们已经定义了双线性配对:

$$H_1(T, \mathbb{Z}) \times H_1(T, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}。$$

在一般定向流形上, 闭链相交的定义与这个特殊情形不同, 唯一困难在于验证所做出的横截性的定义。假设 M 是一个 n 维定向流形, A 和 B 分别是 M 上维数为 k 和 $n-k$ 的分段光滑闭链, $p \in A \cap B$ 是 A 和 B 横截相交的一个点。设 $v_1, \cdot, v_k \in T_p(A) \subset T_p(M)$ 是 $T_p(A)$ 的定向基, $w_1, \cdots, w_{n-k}$ 是 $T_p(B) \subset T_p(M)$ 的定向基; 当 $v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_{n-k}$ 是 $T_p(M) = T_p(A) \oplus T_p(B)$ 的定向基时, 我们把 p 处 A 与 B 的相交指标 $\iota_p(A \cdot B)$ 定义为 $+1$, 反之定义为 -1。如果 A 和 B 处处横截相交, 那么我们定义相交数 $^{\#}(A \cdot B)$ 为

$$^{\#}(A \cdot B) = \sum_{p = A \cap B} \iota_p(A \cdot B)。$$

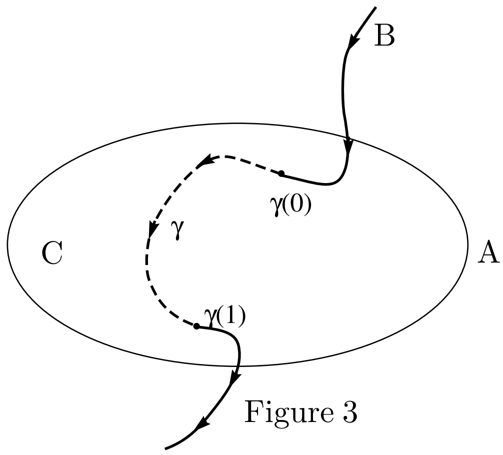


Figure 3

注意, 这个求和是有限的, 因为 A 和 B 有紧致支集并且由假设, $A \cap B$ 是离散的。

我们现在必须证明, 相交数 $^{\#}(A \cdot B)$ 依赖于 A 和 B 的同调类; 即,

$$A \sim 0 \Rightarrow {}^{\#}(A \cdot B) = 0。$$

在这种情形, 我们可以取 $A = \partial C$ 为分段光滑的 $(k+1)$ 维流形 C_i 的边界求和, 使得在每个光滑点 $p \in A$, $T_p(A)$ 的定向基 $v_1, \cdots, v_k$ 与 C_i 向里的法矢量一起给出 C_i 的定向。由标准的横截讨论, 我们可以把链 C 取为与 B 几乎处处横截相交, 使得相交 $C \cap B$ 由分段光滑弧的集合 $\{\gamma_\alpha\}$ 组成。当然, 这些弧的端点构成 A 与 B 的相交点; 我们声明, 对每个 γ, 两个端点 $\gamma(0), \gamma(1) \in A \cap B$ 将有 A 和 B 的相反相交指标。(见图3。) 不难得到: 我们可以找到沿 γ 的 C 的 C^∞ 矢量场 $\{v_i(t) \in T_{\gamma(t)}(C)\}_{i=1,\cdots,k}$ 和沿 γ 的 B 的矢量场 $\{v_i(t) \in T_{\gamma(t)}(B)\}_{i=k+2,\cdots,n}$, 使得对所有的 t,

1. $v_1(t), \cdots, v_k(t), \gamma'(t)$ 是 $T_{\gamma(t)}(C)$ 的定向基,
2. $\gamma'(t), v_{k+2}(t), \cdots, v_n(t)$ 是 $T_{\gamma(t)}(B)$ 的定向基,
3. $v_1(t), \cdots, v_k(t), \gamma'(t), v_{k+2}(t), \cdots, v_n(t)$ 是 $T_{\gamma(t)}(M)$ 的定向基, 并且使得 $v_1(0), \cdots, v_k(0)$ 是 $T_{\gamma(0)}(A)$ 的定向基, $v_1(1), \cdots, v_k(1)$ 是 $T_{\gamma(1)}(A)$ 的定向基。(满足所有这些条件可能要求改变 γ 的指定方向。) 那么, 因为 $\gamma'(1)$ 向外正交于 C, 并且 $v_1(1), \cdots, v_k(1), \gamma'(1)$ 对 C 是正定向的, 所以 $T_{\gamma(1)}(A)$ 的基 $v_1(1), \cdots, v_k(1)$ 必须是负定向的。因此,

$$\iota_{\gamma(0)}(A \cdot B) = +1 \quad 和 \quad \iota_{\gamma(1)}(A \cdot B) = -1,$$

并且我们已经得到了结果。

现在, 如果 $\alpha \in H_k(M, \mathbb{Z})$ 和 $\beta \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ 是任意两个同调类, 那么, 我们可以找到 M 上代表 α 和 β 且横截相交的 C^∞ 分段光滑闭链 A 和 B。相交数 $^{\#}(A \cdot B)$ 由类 α 和 β 确定, 且因此我们已经定义了双线性配对

$$H_k(M, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},$$

称为相交配对并表示为 $^{\#}(\alpha\cdot\beta)$。注意, 从相交指标的定义得到,

$$^{\#}(\beta\cdot\alpha)=(-1)^{k(n-k)}\ ^{\#}(\alpha\cdot\beta)。$$

我们也可以定义任意维数的 M 的同调上的乘积

$$H_{n-k_1}(M,\mathbb{Z})\times H_{n-k_2}(M,\mathbb{Z})\to H_{n-k_1-k_2}(M,\mathbb{Z}):$$

如果 $\alpha\in H_{n-k_1}(M)$ 和 $\beta\in H_{n-k_2}(M)$ 是类, 我们可以找到表示它们并几乎处处横截正交的闭链 A 和 B。定向的相交 C 这样给出, 使得如果 $v_1,\cdots,v_{n-k_1-k_2}$ 是 C 的光滑点处 $T_p(C)$ 的定向基, 并且把它分别完备化到 $T_p(A)$ 的基

$$w_1,\cdots,w_{k_2},v_1,\cdots,v_{n-k_1-k_2}$$

和 $T_p(B)$ 的基

$$v_1,\cdots,v_{n-k_1-k_2},u_1,\cdots,u_{k_1},$$

那么, 整个基

$$w_1,\cdots,w_{k_2},v_1,\cdots,v_{n-k_1-k_2},u_1,\cdots,u_{k_1}$$

对 $T_p(M)$ 是正向的。C 与此定向一起称为 A 和 B 的相交闭链 $A\cdot B$。再次, 为了证明相交在同调上是明确定义的——即, 如果 A 同调于 0 那么闭链 $A\cdot B$ 同调于 0——我们必须首先证明我们可以找到链 C, 且

$$\partial C=A$$

与 B 几乎处处横截正交, 接着证明集合论关系

$$A\cdot B=\partial(C\cdot B)$$

在定向闭链水平上也成立。证明这些断言要使用的技巧类似于在余维数情形的证明, 但比它们要复杂。

术语: 当我们谈论流形 M 上两个闭链 A 和 B 的相交数或"拓扑相交"时, 我们总是指它们代表的类 $\alpha,\beta\in H_*(M,\mathbb{Z})$ 的相交数。因此, 即使 A 和 B 不能横截正交时, 式子 $^{\#}(A\cdot B)$ 也有意义。

Poincaré 对偶

关于闭链相交的基本结果是

定理(Poincaré 对偶): *如果 M 是紧致定向 n 维流形, 那么相交配对*

$$H_k(M,\mathbb{Z})\times H_{n-k}(M,\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$$

是幺模的, 即, 任意线性泛函 $H_{n-k}\to\mathbb{Z}$ 可以表示为与某些类 $\alpha\in H_k(M,\mathbb{Z})$ 的相交, 并且与 $H_{n-k}(M,\mathbb{Z})$ 中所有类相交数为零的任意类 $\alpha\in H_k(M,\mathbb{Z})$ 是挠率类。

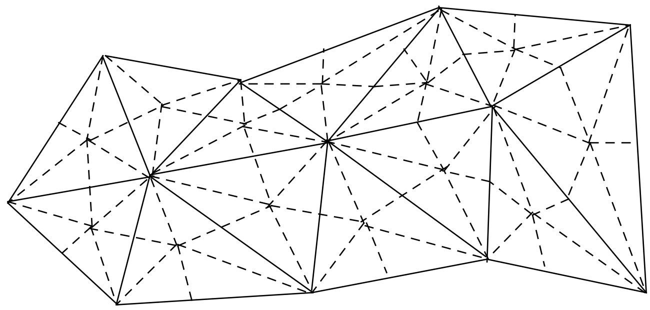


Figure 4

证明: 就象前节一样, 我们可以假设 M 是单纯复形 $K=\{\sigma_\alpha^k,\partial\}_{\alpha,k}$ 下面的流形。证明中的本质步骤是如下 M 的对偶胞腔分解的构造。(见图4。) 首先, 设 $\{\tau_\alpha^k\}$ 是复形 K 的第一重心重分。对每个初始三角形中的顶点 σ_α^0, 设

$$^*\sigma_\alpha^0=\bigcup_{\tau_\beta^n\ni\sigma_\alpha^0}\tau_\beta^n$$

是 n 维胞腔, 它在以 σ_α^0 为顶点的重分中作为 n 维单纯形 τ_β^n 的并集而得到。那么, 对每个在初始分解中的 k 维单纯形 s_α^k, 设

$$^*\sigma_\alpha^k=\bigcap_{\sigma_\beta^0\in\sigma_\alpha^k}{}^*\sigma_\beta^0$$

是伴随于 σ_α^k 的 $k+1$ 个顶点的 n 维胞腔 $^*\sigma_\beta^0$ 的相交。那么, 胞腔 $\{\Delta_\alpha^{n-k}={}^*\sigma_\alpha^k\}$ 给出 M 的一个分解, 称为对 $\{\sigma_\alpha\}$ 的对偶胞腔分解。

注意, 因为对偶分解的 $k+1$ 个胞腔所共有的初始复形的 k 维复形 σ_α^k 的唯一点就是重心, 所以 σ_α 的对偶胞腔 $\Delta_\alpha^{n-k}={}^*\sigma_\alpha^k$ 是对偶胞腔中与 σ_α^k 相交的唯一的 $(n-k)$ 维胞腔; Δ_α^{n-k} 与 s_α^k 横截相交。给定 σ_α^k 上的一个定向, 我们可以把 Δ_α^{n-k} 上的对偶定向如此取得, 使得在 $p=\sigma_\alpha^*\cap\sigma_\alpha$ 处有

$$\iota_p(\sigma_\alpha,\Delta_\alpha)=+1。$$

今后, 如果 σ_α 被看作一个定向单纯形, 那么 $^*\sigma_\alpha$ 将表示有对偶定向的定向胞腔 Δ_α; 我们也用 $^*\Delta_\alpha$ 表示初始定向单纯形 σ_α。

我们现在把复形 $\{\sigma_\alpha^k\}$ 上的边缘算子 ∂ 和 $\{\Delta_\alpha^{n-k}\}$ 上的上边缘算子联系起来。首先注意到, 如果 σ_α^k 有顶点 $\sigma_0^0,\cdots,\sigma_k^0$, 那么, 对偶胞腔 $\Delta_\alpha^{n-k}={}^*\sigma_\alpha^k$ 作为对偶 n 维胞腔的 $(k+1)$ 重相交 $\cap_i\Delta_i^n=\cap_i{}^*\sigma_i^0$ 而给出, 并且因此出现在 Δ_α^{n-k} 的上边缘 $\delta\Delta_\alpha^{n-k}$ 中的胞腔就是胞腔 Δ_i^n 的 k 重相交 $\Delta_j^{n-k+1}=\cap_{i\neq j}\Delta_i^n$, 即, σ^k 的面 σ_j^{k+1} 的对偶胞腔。我们现在声称, 基本关系

$$\delta(\Delta_\alpha^{n-k})=(-1)^{n-k+1}\,{}^*(\partial\sigma_\alpha^k)$$

在定向胞腔的水平上成立, 即, 如果 σ_j 和 Δ_j 分别有象 σ_α 和 Δ_α 的边缘和上边缘一样的定向, 那么, 在 $p'=\sigma_j\cap\Delta_j$ 处,

$$\iota_{p'}(\sigma_j\cdot\Delta_j)=(-1)^{n-k+1}。$$

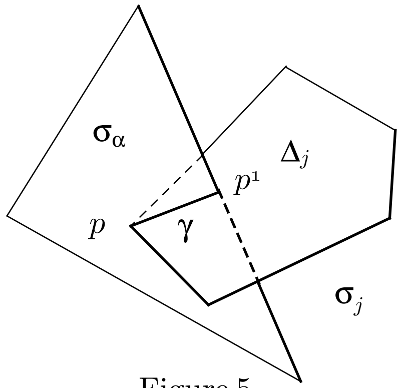


Figure 5

(见图5。) 这与在相交数的同调不变性的验证中做出的讨论是是同类型的。单纯形 s_α^k 与胞腔 Δ_j^{n-k+1} 相交在弧 γ 中, 它从 σ_α 的重心 $p=\gamma(0)$ 到 σ_α 的面 σ_j 的重心 $p'=\gamma(1)$。那么, 设 $v_1,\cdots,v_{k-1}$ 是沿着 γ 的 σ_a 的矢量场, $v_{k+1},\cdots,v_n$ 是沿着 γ 的 Δ_j 的矢量场, 使得 $v_1(0),\cdots,v_{k-1}(0),\gamma'(0)$ 是 $T_{\gamma(0)}(\sigma_\alpha)$ 的定向基, $v_{k+1}(0),\cdots,v_n(0)$ 是 $T_{\gamma(0)}(\Delta_\alpha)$ 的定向基, 并且使得 $v_1(1),\cdots,v_{k_1}(1)\in T_{\gamma(1)}(\sigma_\alpha)$, $v_{k+1}(1),\cdots,v_n(1)\in T_{\gamma(1)}(\Delta_j)$。由假设,

$$\iota_{\gamma(0)}(\Delta_\alpha\cdot\sigma_\alpha)=+1,$$

对 M 上给定的定向, 基 $v_1(0),\cdots,v_{k-1}(0),\gamma'(0),v_{k+1}(0),\cdots,v_n(0)$ 是正的。还有, 因为 $\gamma'(0)$ 在 $\gamma(0)$ 处是向里正交于 Δ_j, 并且因为 $v_{k+1}(0),\cdots,v_n(0)$ 对 $T_{\gamma(0)}(\Delta_\alpha)$ 是正定向的, 所以基

$$\gamma'(0),v_{k+1}(0),\cdots,v_n(0)$$

关于 Δ_j 上的定向有符号 $(-1)^{n-k}$。由连续性, 最后两个断言对 $\gamma(1)$ 也成立。在那里, 因为 $\gamma'(1)$ 在 $\gamma(1)$ 处向外正交于 Δ_α, 并且因为 $v_1(1),\cdots,v_{k-1}(1),\gamma'(1)$ 对 $T_{\gamma(1)}(\sigma_\alpha)$ 是正定向的, 所以基 $v_1(1),\cdots,v_{k-1}(1)$ 对 s_j 将是负定向的。因此, 如所期望的一样,

$$\iota_{\gamma(1)}(\sigma_j\cdots\Delta_j)=(-1)^{n-k+1}。$$

由此我们得到, 映射

$$\sigma_\alpha^p\to\tilde{\Delta}_\alpha^{n-p}$$

在 M 的初始单纯形分解中的链复形 (C_*,∂) 和对偶胞腔分解中的上链复形 $(\tilde{C}^*,\delta)$ 之间诱导了一个同构。所得到的同构

$$D:H_k(M,\mathbb{Z})\to H^{n-k}(M,\mathbb{Z})$$

有这样的性质: 对任意 $\gamma\in H_k(M,\mathbb{Z})$ 和 $\lambda\in H_{n-k}(M,\mathbb{Z})$ 有

$$^{\#}(\gamma\cdot\lambda)=D\gamma(\lambda);$$

并且定理得证。 证毕

Poincaré 对偶的稍微弱的描述是说, 由

$$P(A)(B) = {}^{\#}(A \cdot B)$$

给出的映射

$$H_k(M, \mathbb{Q}) \xrightarrow{P} H_{n-k}(M, \mathbb{Z})^* \cong H^{n-k}(M, \mathbb{Q})$$

是同构——在忽略掉相交配对是幺模这个结果后。由 de Rham 同构

$$H_{\mathrm{DR}}^{n-k} \to H^{n-k}(M, \mathbb{C}),$$

这等价于说, 对 M 上的任意 k 维闭链 A, 存在一个闭 $(n-k)$ 形式 φ, 使得对 M 上的任意 $(n-k)$ 维闭链, 有

$$\int_B \varphi = {}^{\#}(A \cdot B)。$$

假设 φ 和 ψ 的定向流形 M 上的两个闭形式。那么, 外积 $\varphi \wedge \psi$ 是闭的, 利用关系

$$\varphi \wedge (\psi + d\eta) = \varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg \varphi} d(\varphi \wedge \eta),$$

我们得到, $\varphi \wedge \psi$ 的 de Rham 上同调只依赖于 φ 和 ψ 的 de Rham 类。由此我们有线性映射

$$H_{\mathrm{DR}}^k(M) \otimes H_{\mathrm{DR}}^{k'} \to H_{\mathrm{DR}}^{k+k'}(M),$$

并且特别有一个配对

$$H_{\mathrm{DR}}^k(M) \otimes H_{\mathrm{DR}}^{n-k}(M) \to H_{\mathrm{DR}}^n(M) \cong \mathbb{C}。$$

我们现在把 de Rham 上同调中的这个配对与闭链相交通过 Poincaré 对偶联系起来; 为此, 我们首先必须建立 Künneth 公式。

假设 $M = \{\sigma_\alpha^k\}_{\alpha,k}$ 和 $N = \{\sigma_\alpha'^k\}_{\alpha,k}$ 是两个单纯复形。乘积 $\sigma_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l$ 给出乘积空间 $M \times N$ 的一个胞腔分解, 边缘算子为

$$\partial(\sigma_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l) = \partial\sigma_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l + (-1)^k \sigma_\alpha^k \times \partial\sigma_\beta'^l。$$

M 和 N 中的两个闭链

$$A = \sum a_\alpha \sigma_\alpha^k \quad 和 \quad \sum b_\beta \sigma_\beta'^l$$

的乘积

$$A \times B = \sum a_\alpha b_\beta \sigma_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l$$

是一个闭链, 并且 $A \times B$ 的同调类只依赖于 A 和 B 的同调类, 这是因为

$$(A + \partial C) \times B = A \times B + \partial(C \times B)。$$

我们由此得到一个映射

$$H_*(M, \mathbb{Z}) \otimes H_*(N, \mathbb{Z}) \to H_*(M \times N, \mathbb{Z});$$

我们声称, 模挠率后, 它是一个同构。这容易得到, 只要我们把复形 M 和 N 的链用典则基的方式表示出来, 即, 用边缘算子对角化的方式。我们可以如下构造 M 中链的这样的基。假设 M 的维数为 m; 设 $\{\tau_\alpha^m\}$ 是 M 中 m 维闭链的有理数基。对 M 中 m 维链, 把 $\{\tau_\alpha^m\}$ 完备为有理数基; 称例外基元素为 $\{\mu_\alpha^m\}$。设

$$\sigma_\alpha^{m-1} = \partial\mu_\alpha^m;$$

使得 $\{\sigma_\alpha^{m-1}\}$ 是维数为 $m-1$ 的 M 的边缘的基; 对 M 的 $(m-1)$ 维闭链, 把 $\{\sigma_\alpha^{m-1}\}$ 完备到有理数基 $\{\sigma_\alpha^{m-1}, \tau_\beta^{m-1}\}$, 对 M 的 $(m-1)$ 维链, 把 $\{\sigma_\alpha^{m-1}, \tau_\beta^{m-1}\}$ 完备到有理数基 $\{\sigma_\alpha^{m-1}, \tau_\beta^{m-1}, \mu_\gamma^{m-1}\}$。设 $\sigma_\alpha^{m-2} = \partial\mu_\alpha^{m-1}$; 继续下去, 对 M 的链, 我们得到有理数基 $\{\sigma_\alpha^k, \tau_\alpha^k, \mu_\alpha^k\}$, 其中 $\{\mu_\alpha^k\}$ 是边缘的基, $\{\sigma_\alpha^k, \tau_\alpha^k\}$ 是闭链的基, 并且 $\partial\mu_\alpha^k = \sigma_\alpha^{k-1}$。

现在, 设 $\{\sigma_\alpha'^k, \tau_\alpha'^k, \mu_\alpha'^k\}$ 是 N 的链的类似构造的基, 并且设 A 是 $M \times N$ 中的闭链, 表示为 M 和 N 中基元素的乘积的线性组合。因为乘积 $\sigma_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l$, $\sigma_\alpha^k \times \tau_\beta'^l$ 和 $\tau_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l$ 分别是 $\mu_\alpha^{k+1} \times \sigma_\beta'^l$, $\mu_\alpha^{k+1} \times \tau_b'^l$ 和 $(-1)^k\tau_\alpha^k \times \mu_\beta'^{l+1}$ 的边缘, 所以, 在用同调闭链代替 A 后, 我们可以假设这样的项不出现在 A 的表达式中。还有, 如果项

$$\sigma_\alpha^k \times \mu_\beta'^l$$

出现在 A 中, 我们可以通过从 A 把边缘

$$\partial(\mu_\alpha^{k+1} \times \mu_\beta'^l) = \sigma^k \times \mu_b'^l + (-1)^{k+1}\mu_\alpha^{k+1} \times \sigma_\beta'^{l-1}$$

减掉来去掉它。因此我们可以得到,

$$\begin{aligned} A \;\; = \;\; & \sum a_{\alpha\beta kl}\tau_\alpha^k \times \tau_\beta'^l + \sum b_{\alpha\beta kl}\tau_\alpha^k \times \mu_\beta'^l \\ & + \sum c_{\alpha\beta kl}\mu_\alpha^k \times \tau_\beta'^l + \sum d_{\alpha\beta kl}\mu_\alpha^k \times \mu_\beta'^l \\ & + \sum e_{\alpha\beta kl}\mu_\alpha^k \times \sigma_\beta'^l\text{。} \end{aligned}$$

取边缘, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 = \partial A \;\; = \;\; & \sum b_{\alpha\beta kl}(-1)^k\tau_\alpha^k \times \sigma_b'^{l-1} \\ & + \sum c_{\alpha\beta kl}\sigma_\alpha^{k-1} \times \tau_\beta'^l + \sum d_{\alpha\beta kl}\sigma_\alpha^{k-1} \times \mu_\beta'^l \\ & + \sum (-1)^k d_{\alpha\beta kl}\mu_\alpha^k \times \sigma_\beta'^{l-1} \\ & + \sum e_{\alpha\beta kl}\sigma_\alpha^{k-1} \times \sigma_\beta'^l\text{。} \end{aligned}$$

但是现在求和中的所有项是线性独立的, 所以必须等于零; 因此, 对每个 α, β, k, l 有 $b_{\alpha\beta kl} = c_{\alpha\beta kl} = d_{\alpha\beta kl} = e_{\alpha\beta kl} = 0$, 并且

$$A = \sum a_{\alpha\beta kl}\tau_\alpha^k \times \tau_\beta'^l$$

是 M 和 N 的闭链乘积的线性组合。类似地, 我们得到, A 在 $M \times N$ 中同调于零, 只要对每个 α, β, k, l 有 $a_{\alpha\beta kl} = 0$, 并且我们已经建立了 Künneth 公式:

$$H_*(M \times N, \mathbb{Q}) \cong H_*(M, \mathbb{Q}) \otimes H_*(N, \mathbb{Q})。$$

我们现在把闭链相交与紧致定向 n 维流形 M 上形式的外积联系起来。假设 σ 是 M 上的 k 维闭链, τ 是 $(n-k)$ 维闭链, 设 $\varphi \in A^{n-k}(M)$, $\psi \in A^k(M)$ 是 M 上的闭形式, 它们表示 Poincaré 对偶于 σ 和 τ 的类的上同调类, 即, 使得对任意 $(n-k)$ 维闭链 μ, 有

$$\int_\mu \varphi = {}^\#(\sigma \cdot \mu),$$

和对任意 k 维闭链 ν, 有

$$\int_\nu \psi = {}^\#(\tau \cdot \nu)。$$

在有投影映射 π_1, π_2 的乘积 $M \times M$ 上, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mu\times\nu} \pi_1^*\varphi \wedge \pi_2^*\psi &= \int_\mu \varphi \cdot \int_\nu \psi \\ &= {}^\#(\sigma \cdot \mu) \cdot {}^\#(\tau \cdot \nu)。\end{aligned}$$

另一方面, 如果 (p_1, p_2) 是 $\sigma \times \tau$ 与 $\mu \times \nu$ 的交点, 那么, 给出定向后我们得到

$$\iota_{(p_1,p_2)}(\sigma \times \tau, \mu \times \nu) = (-1)^{n-k} \iota_{p_1}(\sigma \cdot \mu) \cdot \iota_{p_2}(\tau \cdot \nu)。$$

因此,

$$\begin{aligned} {}^\#(\sigma \times \tau, \mu \times \nu) &= (-1)^{n-k}\, {}^\#(\sigma \cdot \mu) \cdot {}^\#(\tau \cdot \nu) \\ &= (-1)^{n-k} \int_{\mu\times\nu} \pi_1^*\varphi \wedge \pi_2^*\psi; \end{aligned}$$

注意, 这个公式对任意 $(n-k')$ 维闭链 μ 和 k 维闭链 ν 成立: 如果 $k \neq k'$, 那么两边都等于零。由 Künneth 公式, 这样的闭链乘积生成 $H_n(M \times M, \mathbb{Q})$, 并且因此得到形式 $\pi_1^*\varphi \wedge \pi_2^*\psi$ Poincaré 对偶于闭链 $(-1)^{n-k}\sigma \times \tau$, 即, 对 $M \times M$ 中的任意 n 维闭链 η,

$$(-1)^{n-k} \int_\eta \pi_1^*\varphi \wedge \pi_2^*\psi = {}^\#(\sigma \times \tau \cdot \eta)。$$

我们特别把它应用到对角 $\Delta \subset M \times M$。一方面,

$$\int_\Delta \pi_1^*\varphi \wedge \pi_2^*\psi = \int_M \varphi \wedge \psi。$$

另一方面, $\sigma \times \tau$ 与 Δ 的交点 (p, p) 对应于 σ 与 τ 的交点 p, 考虑定向后, 我们发现, 对这样的点 p,

$$\iota_{(p,p)}(\sigma \times \tau \cdot \Delta) = (-1)^{n-k} \iota_p(\sigma \cdot \tau)。$$

因此,

$$^{\#}(\sigma\cdot\tau)=(-1)^{n-k}\,{}^{\#}(\sigma\times\tau\cdot\Delta)=\int_M\varphi\wedge\psi,$$

即, 同调中闭链的相交 *Poincaré* 对偶于上同调中的外积。

注意, 我们可以确定上同调上拖回映射的 Poincaré 对偶。显然, 如果 $f:M\to N$ 在闭链 $A\subset N$ 上非奇异的流形的 C^∞ 映射, 那么, 在适当确定定向后, 闭链 $f^{-1}(A)$ *Poincaré* 对偶于经 A 的 *Poincaré* 对偶的 f 的拖回。不难得到: 如果 $B\subset M$ 是横截相交 $f^{-1}(A)$ 的 M 上的任意闭链, 那么, $f(B)$ 将在 $f(B\cap f^{-1}(A))$ 处横截相交 A。如果 φ 是 Poincaré 对偶于 A 的 N 上的闭形式, 那么,

$$\int_B f^*\varphi=\int_{f(b)}\varphi={}^{\#}(f(b)\cdot A)={}^{\#}(B\cdot f^{-1}(A)),$$

所以, $f^{-1}(A)$ Poincaré 对偶于 $f^*\varphi$。

在这个背景下, 对偶的弱形式可以再次重新给出下列断言: 由

$$([\varphi],[\psi])\to\int_M\varphi\wedge\psi$$

给出的配对

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M)\otimes H^{n-k}_{\mathrm{DR}}(M)\to\mathbb{R}$$

是非退化的, 或者, 对 M 上任意闭 k 形式 φ, 存在一个 $(n-k)$ 维闭链 A——除了同调外它是唯一的, 使得对任意闭 $(n-k)$ 形式 ψ, 有

$$\int_M\varphi\wedge\psi=\int_A\psi。$$

注意: 两个上同调类 $\alpha\in H^k(M,\mathbb{Q})$ 和 $\beta\in H^{k'}(M,\mathbb{Q})$ 的普通杯积 $\alpha\cup\beta$ 可以定义为经由一个对角映射的拖回

$$\alpha\cup\beta=\Delta^*(\alpha\otimes\beta),$$

对 M 上所有闭链 σ,τ, 这个 $M\times M$ 上类 $\alpha\otimes\beta$ 的这个对角映射 $\Delta:M\to M\times M$ 由下式定义:

$$\alpha\otimes\beta(\sigma\times\tau)=\alpha(\sigma)\cdot\beta(\tau)。$$

用这个定义, 显然, 如果 φ 和 ψ 是表示 α 和 β 的 M 上的闭形式, 那么 $M\times M$ 上的形式 $\pi_1^*\varphi\wedge\pi_2^*\psi$ 表示 $\alpha\otimes\beta$, 并且因此 $\varphi\wedge\psi$ 表示类 $\alpha\cup\beta$。因此, 通过 de Rham 同构, 形式的外积对应于上闭链的杯积。

作为一个例子, 让我们来计算 $\mathbb{P}^n$ 的上同调代数。为此, 用 $X=(X_0,\cdots,X_n)$ 表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的欧氏坐标, 并且 $0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_n=\mathbb{C}^n$ 表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的标志, 它由

$$V_i=(X_n=\cdots=X_{i+1}=0)$$

给出; 设 $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ 是 V^{k+1} 的像。就象我们已经知道的一样, $\mathbb{P}^n$ 中超平面 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的补集 $\mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1}$ 是欧氏坐标为 $X_0/X_n, \cdots, X_{n-1}/X_n$ 的 $\mathbb{C}^n$; 类似地, $\mathbb{P}^k$ 中 $\mathbb{P}^{k-1}$ 的补集是欧氏坐标为 $X_0/X_k, \cdots, X_{k-1}/X_k$ 的 $\mathbb{C}^k$。从而我们得到 $\mathbb{P}^n$ 的胞腔分解,

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1}) \cup (\mathbb{P}^{n-1} - \mathbb{P}^{n-2}) \cup \cdots \cup (\mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^0) \cup \mathbb{P}^0,$$

它是作为 $2k$ 维胞腔 $\mathbb{P}^k - \mathbb{P}^{k-1} \cong \mathbb{C}^k$ 的并集给出的, 每个 $k = 0, \cdots, n$ 是一个元素, 这推广了熟悉的 Riemann 球面的图像。因为只在偶维有胞腔, 所以所有边缘映射是零, 并且因此 $\mathbb{P}^n$ 的同调被胞腔的闭集类 $\mathbb{P}^k$ 自由生成, 即由给定自然定向的它的线性子空间的同调类生成。

因为 $\mathbb{P}^n$ 中的 k 维平面 $\mathbb{P}^k$ 和 $(n-k)$ 维平面 $\mathbb{P}^{n-k}$ 一般横截相交于一点, 所以在这种情形下 Poincaré 对偶是显然的。的确, 因为一个 $(n-k_1)$ 维平面一般横截相交于一个 $(n-k_2)$ 维平面于一个 $(n-k_1-k_2)$ 维平面中, 所以

$$((\mathbb{P}^{n-k_1}) \cdot (\mathbb{P}^{n-k_2})) = \pm(\mathbb{P}^{n-k_1-k_2})。$$

解析闭链的相交

现在假设 M 是维数为 n 的紧致复流形, $V \subset M$ 是维数为 k 的可能奇异的解析子簇。就象我们已经看到的, Stokes 公式

$$\int_V d\psi = 0$$

对 M 上任意 $(2k-1)$ 形式成立。因此我们可以用

$$[\varphi] \to \int_V \varphi$$

来定义 $H^{2k}_{\mathrm{DR}}(M)$ 上的线性泛函, 其中 V 有自然定向。由 Poincaré 对偶, 这个线性泛函确定了一个上同调类 $\eta_V \in H^{2n-2k}_{\mathrm{DR}}(M)$, 称为 V 的基本类。

我们还可以用相交配对的方式来定义 V 的基本类。对任意同调类 $\alpha \in H_{2n-2k}(M, \mathbb{Z})$, 我们可以找到一个闭链 A, 它代表 α 并且与 V 横截相交于光滑点。实际上, 相交数

$$^{\#}(V \cdot A) = \sum_{p \in A \cap V} \iota_p(V, A)$$

——其中 V 也有自然定向——只依赖于同调类 α: 如果 $A' \sim A$, 那么因为 V 的奇异轨迹的实余维数 $\geqslant 2$, 所以我们可以找到 M 上一个 $(2n-2k+1)$ 维链 C, 它避免了 V 的奇异集合, 与 V 几乎处处横截相交, 并且使得

$$\partial C = A - A'。$$

于是 $^{\#}(A \cdot V) = {}^{\#}(A' \cdot V)$ 的证明正好象本节开头那样处理。因此, V 定义了一个线性泛函

$$H_{2n-2k}(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z};$$

相应的上同调类 $\eta_V \in H^{2n-2k}(M)$ 是 V 的基本类。

注记: 当我们谈论簇 $V \subset M$ 的基本类时, 我们也可能指它的 Poincaré 对偶——即, 由线性泛函

$$\begin{gathered} H^{2n-2k}(M) \to \mathbb{C} \\ [\varphi] \mapsto \textstyle\int_V \varphi \end{gathered}$$

给出的同调元素。通常, 它可以从上下文看出的, 或者它对我们所谈论的情况是无关紧要的。

我们现在进行一个简单的观察。假设 V 和 W 是维数为 k 和 $n-k$ 的解析簇, 在复流形 M 上横截相交于一个点 p。我们可以取 p 附近 M 的全纯坐标 $z=(z_1,\cdots,z_n)$, 使得 V 和 W 由下式给出:

$$\begin{aligned} V &= (z_{k+1}=\cdots=z_{n-k}=0) \\ W &= (z_1=\cdots=z_k=0)。\end{aligned}$$

写出 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, M 上的自然定向由 $T_p(M)$ 的基

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

给出, 同时 V 和 W 的定向由下式给出:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

和

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}},\frac{\partial}{\partial y_{k+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_n}\right)。$$

那么, 我们得到, 如果 V, W 和 M 都给出自然定向, 有

$$\iota_p(V\cdot W) = +1。$$

两个横截相交的解析子簇的相交指标总是正数, 这个平凡的观察实际上是代数几何的基石之一。它把两个簇的点集论相交(一个先验的几何不变量)与相交数(一个先验的拓扑不变量)联系起来, 并且提供了一个基本的沟通。然而在我们完全利用这个结合前, 我们必须把它扩张到可能的非横截相交的情形。讨论如下(解析簇相交的其它讨论将在第三章第二节和第五章第二节给出)。

设 V 和 W 是 $\mathbb{C}^n$ 中半径为 1 的多圆柱 Δ 中维数为 k 和 $n-k$ 的两个解析簇, 原点为它们的唯一相交点。考虑半径为 1/2 的多圆柱与它自己的乘积 $\Delta' \times \Delta'$ 中的两个簇

$$\tilde{V} = \pi_1^{-1}(V) = \{(z,w) : z \in V\}$$

和

$$\tilde{W} = \{(z, w) : z - w \in W\}。$$

当然, 对每个 ε, 簇 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$ 分别与纤维 $\pi_2^{-1}(\varepsilon) = \Delta' \times \{\varepsilon\} \cong \Delta'$ 相交于解析簇 V 和解析簇 $W + \varepsilon$ (W 平移 ε)中; 还有, 当 V 和 $W + \varepsilon$ 横截相交于点 p 时, $\pi_2^{-1}(\varepsilon)$ 与横截相交 $\tilde{V} \cap \tilde{W}$ 正好相交于点 (p, ε)。相交 $\tilde{V} \cap \tilde{W} \subset \Delta' \times \Delta'$ 是维数为 n 的解析簇, 并且因此投影 $\pi_2 : \tilde{V} \cap \tilde{W} \to \Delta'$ 把 $\tilde{V} \cap \tilde{W}$ 表示为 Δ' 的一个分支 μ 叶覆盖; 因此, 我们得到, 对处在 Δ' 的一个解析子簇之外的 $\varepsilon \in \Delta'$, 簇 V 和 $W + \varepsilon$ 将相交于 Δ' 中的 μ 个点。数 μ 称为 0 处 V 和 W 的相交多重数, 写作

$$\mu = m_0(V \cdot W)。$$

通过构造, 相交多重数总是正的, 由隐函数定理, 它等于 1, 当且仅当 $\tilde{V} \cap \tilde{W}$ 与纤维 $\pi_2^{-1}(0)$ 横截相交——即, 当且仅当 V 和 W 横截相交于原点。注意, 定义不依赖于坐标 z 的选择, 使得它也可以应用到复流形的两个解析子簇。我们现在来验证, 如果 V 和 W 是紧致复流形 M 上的互补维数的解析子簇, 那么,

$$^{\#}(V \cdot W) = \sum_{p \in V \cap W} m_p(V \cdot W)。$$

为此, 设 z, w 是点 $p \in V \cap W$ 周围的局域坐标, $p = (0, 0)$ 是在半径为 1 的球 Δ 中 V 与 W 的唯一相交点。设 $\rho(r)$ 是 C^∞ 脉冲函数, 在半径为 1/4 的球 Δ'' 中恒等于 1, 在半径为 1/2 的球 Δ' 之外恒等于零。那么, 对一般的足够小的 ε, 轨迹

$$W_\varepsilon = \{(z) : z - \rho(\|z\|) \cdot \varepsilon \in W\} \subset \Delta$$

将

1. 在 Δ' 之外与 W 是一样的,
2. 在 $\Delta' - \Delta''$ 中与 V 不相交,
3. 在 Δ'' 中是解析簇, 与 V 横截相交于 $\mu = m_p(V \cdot W)$ 个点。

现在, 设 $\{p_i\} = V \cap W$。选择 p_i 周围的坐标球 Δ_i, 半径为上述的 ε_i; 设

$$W' = (W - \cup \Delta_i) \cup (\cup W_{\varepsilon_i})。$$

于是, W' 在余维数为 2 或更大的轨迹之外是光滑流形, 并且由我们的一般方法得到它表示 M 中的上同调类 $\eta_{W'}$; 的确, $\eta_{W'} = \eta_W$, 这是因为在每个 Δ' 中,

$$W - W' = \partial(\{(z : z - t \cdot \varepsilon_i \in W, 0 \leqslant t \leqslant \rho(\|z\|)\})。$$

最后, 因为 W' 与 V 横截相交于 Δ'' 中的 $m_{p_i}(V \cdot W)$ 个点(其中 W' 和 V 都是有自然定向的解析簇)并且在其它处不相交, 所以, 正如所期望的那样,

$$^{\#}(W \cdot V) = {}^{\#}(W' \cdot V) = \sum m_{p_i}(V \cdot W)。$$

总之,

紧致复流形上两个相交于有限点集的互补维数的解析子簇的拓扑相交数是

$$^{\#}(V\cdot W)=\sum_{p\in V\cap W}m_p(V\cdot W)。$$

相交多重数 $m_p(V\cdot W)$ 满足

$$m_p(V\cdot W)\geqslant 1,$$

当且仅当 V 和 W 横截相交于 p 处时等号成立。

它的一个重要推论是, 如果 V 和 W 相交于孤立点, 那么它们的拓扑相交数 $^{\#}(V\cdot W)$ 大于或等于它们的点集相交数 $^{\#}\{V\cap W\}$。因此, 比如, 如果 M 中两个解析簇的相交 $V\cap W$ 包含多于 $^{\#}(V\cdot W)$ 个点, 那么 $V\cap W$ 必然包含一条曲线。

作为这个断言的一个简单结果, 注意有:

如果 M 是射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的任意复子流形, $V\subset W$ 是任意解析子簇, 那么 V 的基本类在 M 的同调中是非零的。

容易看到: 如果 M 的维数为 n, V 的维数为 k, 那么, 我们可以找到 $\mathbb{P}^n$ 的线性子空间 $\mathbb{P}^{n-k}$, 它与 V 相交于孤立点, 再设 $W=M\cap\mathbb{P}^{n-k}$, 得到

$$^{\#}(W\cdot V)>0,$$

它意味着 $\eta_V\neq 0\in H^{2n-2k}(M)$。

作为一个推论, 我们得到,

M 的偶 *Betti* 数是正的,

因为由上述, M 与 $\mathbb{P}^n$ 中的子空间 $\mathbb{P}^{n-m+k}$ 的相交 V 是 M 中维数为 k 的解析子簇, 并且因此表示 $H_{2k}(M)$ 的一个非零元素。

类似地,

同调于超平面的 $\mathbb{P}^n$ 的任意解析子簇是一个超平面。

为此, 我们注意到, 如果 V 同调于超平面, 它与直线的相交数为 1。那么如果 p_1,p_2 是 V 的两个任意点, 与 V 有公共两点的直线 $L=\overline{p_1p_2}$ 必然与 V 有一公共曲线; 即, L 必然包含在 V 中。因此 V 包含连接它的任意两点的直线, 并且因此是 $\mathbb{P}^n$ 的线性子空间。

从这里得到,

$\mathbb{P}^n$ 的任意全纯自同构由 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的线性变换所诱导。

设 $X_0,\cdots,X_n$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的齐次坐标, $x_i=X_i/X_0$ 是在超平面 $H=(X_0=0)$ 的补集上的相应欧氏坐标。因为 $\mathbb{P}^n$ 中超平面的基本类生成 $H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, 所以 $\mathbb{P}^n$ 的任意全纯自同构 φ 必然把超平面变成同调于超平面的 $\mathbb{P}^n$ 的复子流形中, 因此变成超平面。因此, 把 φ 与 $\mathbb{P}^n$ 的线性变换复合后, 我们可以假设 $\varphi(H)=H$。类似地, φ 必须把坐标超平面 $H_i(x_i=0)$ 变到不同于 H 的超平面, 且因此我们得到

$$\varphi(H_i)=(a_{1,i}x_1+\cdots+a_{n,i}x_n+a_{0,i}=0)。$$

那么欧氏坐标 x_i 的拖回 $\varphi^*(x_i)$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的亚纯函数, 沿着 H 有一个单极点和沿着 $\varphi(H_i)$ 有一个零点; 因此函数

$$\frac{\varphi^*(x_i)}{a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}$$

在所有 $\mathbb{P}^n$ 上是全纯的, 因而是常数。于是,

$$\varphi^*(x_i) = a'_{o,i} + a'_{1,i}x_1 + \cdots + a'_{n,i}x_n,$$

并且因此 φ 是线性的。

注意, 因此 $\mathbb{P}^n$ 的自同构群是一般线性群 GL_{n+1} 除以一维标量矩阵子群 $\{\lambda I\}$ 的商 PGL_{n+1}。

最后的评论: 当复流形 M 的两个解析子簇(不必是互补维数的) V 和 W 横截相交时, 在簇 $V \cap W$ 用 V 和 W 的拓扑相交的自然定向计数的情况下, 它们也是正的。更一般地, 如果我们定义沿着不可约簇 $Z \subset V \cap W$ 的 V 和 W 的相交多重数 $m_Z(V \cdot W)$ 为多重数

$$\mathrm{mult}_p((V \cap H) \cdot (W \cap H))_H,$$

其中 p 是 Z 的一般光滑点, H 是与 Z 横截相交于点 p 的 p 的邻域中的子流形, 那么, V 与 W 的拓扑相交由下式给出:

$$(V \cdot W) = \sum_{Z_{\mathrm{irr}} \subset V \cap W} \mathrm{mult}_{Z_i}(V \cdot W) \cdot Z_i。$$

5. 矢量丛, 联络和曲率

复矢量丛和全纯矢量丛

设 M 是可微流形。M 上的 C^∞ 复矢量丛由以 M 为参数的一族复矢量空间 $\{E_x\}_{x \in M}$ 与 $E = \cup_{x \in M} E_x$ 上的 C^∞ 流形结构一起组成, 使得

1. 把 E_x 映到 x 的投影映射是 C^∞ 的,

2. 对每个 $x_0 \in M$, 存在一个包含 x_0 的开集 U 和把每个 $x \in U$ 的矢量空间 E_x 同构地映到 $\{x\} \times \mathbb{C}^k$ 上的一个同胚

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k;$$

φ_U 称为 U 上 E 的平庸化。

E 的纤维 E_x 的维数称为 E 的秩; 特别是, 秩为 1 的矢量丛称为线丛。

注意, 对一对任意平庸化 φ_U 和 φ_V, 由

$$g_{UV}(x) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{\{x\} \times \mathbb{C}^k}$$

给出的映射

$$g_{UV}: U \cap V \to GL_k$$

是 C^∞ 的; 映射 g_{UV} 称为相对于平庸化 φ_U, φ_V 的 E 的转换函数。 E 的转换函数必须满足恒等式

$$\begin{aligned} g_{UV}(x) \cdot g_{VU}(x) &= I \quad \text{对所有} x \in U \cap V \\ g_{UV}(x) \cdot g_{VW}(x) \cdot g_{WU}(x) &= I \quad \text{对所有} x \in U \cap V \cap W。 \end{aligned}$$

反过来, 给定 M 的一个开覆盖 $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ 和满足上述恒等式的 C^∞ 映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL_k$, 那么, 存在唯一一个复矢量丛 $E \to M$, 其转换函数为 $\{g_{\alpha\beta}\}$: 不难验证, 作为一个点集的 E 必须是并集

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}^k,$$

其中, 点 $(x, \lambda) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k$ 与 $(x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \lambda) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ 等价, 流形结构由包含映射 $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \hookrightarrow E$ 所诱导。

作为一般的规则, 矢量空间上的运算诱导矢量丛上的运算。例如, 如果 $E \to M$ 是复矢量丛, 我们把对偶丛 $E^* \to M$ 取为纤维为 $E_x^* = (E_x)^*$ 的复矢量丛; 于是, 平庸化

$$\varphi_U: E_U \to U \times \mathbb{C}^k$$

(其中 $E_U = \pi^{-1}(U)$)诱导出映射

$$\varphi_U^*: E_U^* \to U \times \mathbb{C}^{k*} \cong U \times \mathbb{C}^k,$$

它给出了流形的结构 $E^* = \cup E_x^*$。这个构造最容易用转换函数来表示: 如果 $E \to M$ 有转换函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$, 那么, $E^* \to M$ 就是由转换函数

$$j_{\alpha\beta}(x) = {}^t g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$$

给出的复矢量丛。类似地, 如果 $E \to M$, $F \to M$ 分别是秩为 k 和 l 的复矢量丛, 转换函数分别为 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{h_{\alpha\beta}\}$, 那么, 我们可以定义下列丛:

1. $E \oplus F$, 其转换函数为:

$$j_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l),$$

2. $E \otimes F$, 其转换函数为:

$$j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in GL(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l),$$

3. $\wedge^r E$, 其转换函数为:

$$j_{\alpha\beta}(x) = \wedge^r g_{\alpha\beta}(x) \in GL(\wedge^r \mathbb{C}^k)。$$

特别是, $\wedge^k E$ 是由

$$j_{\alpha\beta}(x) = \det g_{\alpha\beta}(x) \in GL(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$

给出的线丛, 称为 E 的行列式丛。

从 E 的子丛 $F \subset E$ 是 E 的纤维 E_x 的子空间集合 $\{F_x \subset E_x\}_{x\in M}$, 使得 $F = \cup F_x \subset E$ 是 E 的子流形; F 本身显然是矢量丛。$F \subset E$ 是矢量丛这个条件等价于说, 对每个 $x \in M$, 在 M 中存在 x 的一个邻域 U 和一个平庸化

$$\varphi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^k,$$

使得

$$\varphi_U|_{F_U} : F_U \to U \times \mathbb{C}^l \subset U \times \mathbb{C}^k。$$

相对于这些平庸化的 E 的转换函数于是有下列形式:

$$g_{UV}(x) = \left(\begin{array}{c|c} h_{UV}(x) & k_{UV}(x) \\ \hline 0 & j_{UV}(x) \end{array}\right)。$$

从 F 的转换函数为 h_{UV}, 映射 j_{UV} 是由 $(E/F)_x = E_x/F_x$ 给出的商丛 E/F 的转换函数。

给定可微流形 M 和 N 的一个 C^∞ 映射 $f : M \to N$ 和复矢量丛 $E \to N$, 我们可以通过设

$$(f^*E)_x = E_{f(x)}$$

来定义拖回丛 f^*E。如果

$$\varphi : E_U \to U \times \mathbb{C}^n$$

是 $f(x)$ 邻域中 E 的平庸化, 那么映射

$$f^*\varphi : f^*E_{f^{-1}U} \to f^*U \times \mathbb{C}^n$$

在开集 $f^{-1}U$ 上把它的流形结构赋予了 f^*E 。当然, 拖回丛 f^*E 的转换函数将是 E 的转换函数的拖回。

M 上矢量丛 E 和 F 之间的映射由 C^∞ 映射 $f : E \to F$ 给出, 使得 $f(E_x) \subset F_x$ 和 $f_x = f|_{E_x} : E_x \to F_x$ 是线性的。注意,

$$\mathrm{Ker}(f) = \cup \mathrm{Ker} f_x \subset E$$

和

$$\mathrm{Im}(f) = \cup \mathrm{Im} f_x \subset F$$

分别是 E 和 F 的子丛, 当且仅当映射 f_x 都有相同的秩。M 上的两个丛 E 和 F 是同构的, 如果存在一个映射 $f : E \to F$ 使得对所有的 $x \in M$ 有 $f_x : E_x \to F_x$; M 上的矢量丛是平庸的, 如果它同构于积丛 $M \times \mathbb{C}^k$。

最后, $U \subset M$ 上矢量丛 $E \xrightarrow{\pi} M$ 的截面 σ 是一个 C^∞ 映射

$$\sigma : U \to E,$$

使得对所有的 $x \in U$ 有 $\sigma(x) \in E_x$。U 上 E 的标架是 U 上 M 的截面集合 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ 使得对所有 $x \in U$, $\{\sigma_1(x), \cdots, \sigma_k(x)\}$ 是 E 的一个基。U 上 E 的标架本质是与 U 上 E 的平庸化是一回事: 给定一个平庸化

$$\varphi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^k,$$

截面

$$\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i)$$

形成一个标架; 反过来, 给定一个标架 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$, 对 E_x 中的 $\lambda = \sum \lambda_i \sigma_i(x)$, 我们可以用

$$\varphi_U(\lambda) = (x, (\lambda_1, \cdots, \lambda_k))$$

来定义一个平庸化 φ_U。

注意, 给定 U 上 E 的一个平庸化 φ_U, 通过

$$\sigma(x) = \sum f_i(x) \cdot \varphi_U^{-1}(x, e_i),$$

我们可以把 U 上 E 的每个截面 σ 唯一表示为一个 C^∞ 矢量取值函数 $f = (f_1, \cdots, f_k)$; 如果 φ_V 是 V 上 E 的平庸化, $f' = (f_1', \cdots, f_k')$ 是 $\sigma|_{V \cap U}$ 的相应表示, 那么

$$\sum f_i(x) \cdot \varphi_U^{-1}(x, e_i) = \sum f_i'(x) \cdot \varphi_V^{-1}(x, e_i),$$

所以,

$$\sum f_i(x) \cdot e_i = \sum f_i'(x) \cdot \varphi_U \varphi_V^{-1}(x, e_i),$$

即,

$$f = g_{UV} f'。$$

因此, 用平庸化 $\{\varphi_\alpha : E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$ 的方式, $\cup U_\alpha$ 上 E 的截面正好对应于矢量取值 C^∞ 函数的集合 $\{f_\alpha = (f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_k})\}_\alpha$, 使得对所有 α, β,

$$f_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot f_\beta,$$

其中, $g_{\alpha\beta}$ 是相对于 $\{\varphi_\alpha\}$ 的 E 的转换函数。

现在, 设 M 是复流形。**全纯矢量丛** $E \xrightarrow{\pi} M$ 是复矢量丛以及 E 上的复流形结构, 使得对任意 $x \in M$, 存在 M 中的 $U \ni x$ 和一个平庸化

$$\varphi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^k,$$

它是复流形的双全纯映射。这样的平庸化称为**全纯平庸化**。注意, 如果 $\{\varphi_\alpha : E_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$ 是全纯平庸化, 那么, 相对于 $\{\varphi_\alpha\}$ 的 E 的转换函数是全纯映射, 并且反过来, 给

定满足第59(66)页恒等式的全纯映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL_k$, 我们可以构造一个转换函数为 $g_{\alpha\beta}$ 的全纯矢量丛 $E \to M$。

迄今所讨论的所有矢量丛的性质, 都可直接转到全纯矢量丛的范畴。我们可以定义全纯矢量丛的对偶丛, 直积, 张量积和其它积丛为全纯的; 同样, 我们观察到, 在复流形的全纯映射 $f: M \to N$ 下, 全纯矢量丛 E 的拖回丛 f^*E 有一个自然的全纯结构。 M 上全纯矢量丛 E, F 的全纯映射是全纯映射 $f: E \to F$, 满足 $f: E_x \to F_x$ 是线性的; 全纯矢量丛 E 的全纯子丛是子丛 $F \subset E$, 其中, F 是 E 的复子流形, 并且商丛也是全纯的。 $U \subset M$ 上全纯丛 E 的截面 σ 称为全纯的, 如果 $\sigma: U \to E$ 是全纯映射, 标架 $\sigma(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$ 称为全纯的, 如果每个 σ_i 是全纯的; 并且, 用全纯标架 $\{\sigma_i\}$ 的方式, 任意截面

$$\sigma(x) = \sum f_i(x) \cdot \sigma_i(x)$$

是全纯的, 当且仅当函数 f_i 是全纯的。

C^∞ 和全纯矢量丛之间的一个重要差别是: 在矢量丛的截面空间上没有自然的外微分 d 的定义, 而在全纯矢量丛 E 上, 从 E 值 (p,q) 形式到 E 值 $(p,q+1)$ 形式的 $\bar\partial$ 算子

$$\bar\partial: A^{p,q}(E) \to A^{p,q+1}(E)$$

有明确的定义: 我们取 U 上 E 的任意局域全纯标架为 $\{e_1, \cdots, e_k\}$, 把 $\sigma \in A^{p,q}(E)$ 写作

$$\sigma = \sum \omega_i \otimes e_i, \quad \omega \in A^{p,q}(U),$$

并且设

$$\bar\partial\sigma = \sum \bar\partial\omega_i \otimes e_i。$$

如果 $\{e_1', \cdots, e_k'\}$ 是 U 上 E 的任意其它全纯标架, 且

$$e_i = \sum g_{ij} e_j',$$

那么,

$$\sigma = \sum g_{ij}\omega_i \otimes e_j'$$

且

$$\bar\partial\sigma = \sum \bar\partial(g_{ij}\omega_i) \otimes e_j' = \sum g_{ij} \cdot \bar\partial\omega_i \otimes e_j' = \sum \bar\partial\omega_i \otimes e_i,$$

所以 $\bar\partial\sigma$ 不依赖于标架。

例子

设 M 是复流形, 再设 $T_x(M)$ 是 x 处 M 的复切空间(P.16)。对 $x \in U \subset M$ 和一个坐标卡 $\varphi_U: U \to \mathbb{C}^n$, 对每个 $x \in U$, 我们得到映射

$$\varphi_{U_*}: T_x(M) \to T_{\varphi(x)}(U) \cong \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\} \cong \mathbb{C}^{2n},$$

因此得到映射

$$\varphi_{U_*}:\bigcup_{x\in U}T_x(M)\to U\times\mathbb{C}^{2n},$$

它赋予 $T(M)=\cup_{x\in M}T_x(M)$ 复矢量丛的结构, 称为**复切丛**。$T(M)$ 的转换函数为

$$j_{U,V}=\mathscr{J}_{\mathbb{R}}(\varphi_U\varphi_V^{-1})。$$

现在, 对每个 $x\in M$,

$$T_x(M)=T_x'(M)\oplus T_x''(M),$$

其中, $T_x'(M)$ 和 $T_x''(M)$ 见第14(17)页。子空间 $\{T_x'(M)\subset T_x(M)\}$ 形成子丛 $T'(M)\subset T(M)$, 称为**全纯切丛**。$T'(M)$ 的转换函数为

$$j_{U,V}=\mathscr{J}_{\mathbb{C}}(\varphi_U\varphi_V^{-1}),$$

并且因此 $T'(M)$ 自然有全纯矢量丛结构。

类似地, 我们定义:

$T^*(M)=T(M)^*$: 复余切丛,

$T^{*\prime}(M),T^{*\prime\prime}(M)$: 全纯和反全纯余切丛,

$T^{*(p,q)}(M)=\wedge^pT^{*\prime}(M)\otimes\wedge^qT^{*\prime\prime}(M)$。

全纯和复化切丛和余切丛的张量积, 对称积和外积称为张量丛。

如果 $V\subset M$ 是复子流形, 那么我们把 M 中 V 的**法丛** $N_{V/M}$ 定义为限制在 V 上的 M 的切丛与子丛

$$T'(V)\hookrightarrow T'(M)|_V$$

的商丛。M 中 V 的**余法丛** $N_{V/M}^*$ 是法丛的对偶。

度量, 联络和曲率

设 $E\to M$ 是复矢量丛。E 上的**厄米度量**是 E 的每根纤维 E_x 上的厄米内积, 并随着 $x\in M$ 光滑地变化——即, 使得如果 $\zeta=\{\zeta_1,\cdots,\zeta_k\}$ 是 E 的一个标架, 那么函数

$$h_{ij}=(\zeta_i(x),\zeta_j(x))$$

是 C^∞ 的。E 的一个标架 ζ 称为**幺正的**, 如果 $\zeta_1(x)\cdots,\zeta_k(x)$ 对每个 x 都是 E_x 的正交基; 幺正标架总在局域上存在, 这是因为我们可以取任意标架, 然后把它 Gram-Schmidt 化。

如果 E 是有厄米度量的丛, $F\subset E$ 是子丛, 那么, 子空间 $\{F_x^\perp\subset E_x\}$ 形成 E_x 的一个子丛, 它 C^∞ 同构于商丛 E/F。

有厄米度量的全纯矢量丛称为**厄米矢量丛**。

定义 复矢量丛 $E\to M$ 上的**联络**是一个映射

$$D:\mathscr{A}^0(E)\to\mathscr{A}^1(E),$$

对所有截面 $\zeta \in \mathscr{A}^0(E)(U)$, $f \in C^\infty$, 它满足

$$D(f \cdot \zeta) = df \otimes \zeta + f \cdot D(\zeta)。$$

联络本质上是把截面进行微分的一种方法: 对 $\xi \in \mathscr{A}^0(E)(U)$, $D\xi$ 与切矢量 $v \in T_x(M)$ 的约缩可以看作在方向 v 上 ξ 的微分。然而, 它只是微分的一阶近似, 因为混合偏微分一般将不相等。

设 $e = e_1, \cdots, e_n$ 是 U 上 E 的标架。给定 E 上的联络 D, 我们可以把 De_i 分解到它的分量, 写作

$$De_i = \sum \theta_{ij} e_j。$$

1 形式矩阵 $\theta = (\theta_{ij})$ 称为 D 关于 e 的**联络矩阵**。e 和 θ 的信息确定了 D: 对一个一般的截面 $\sigma \in \mathscr{A}^0(E)(U)$, 写作

$$\sigma = \sum \sigma_i e_i,$$

那么, 我们得到

$$\begin{aligned} D\sigma &= \sum d\sigma_i \cdot e_i + \sum \sigma_i \cdot De_i \\ &= \sum_j \left(d\sigma_j + \sum_i \sigma_i \theta_{ij} \right) e_j。 \end{aligned}$$

在点 $z_0 \in U$ 处的联络矩阵依赖于 z_0 邻域中标架的选择: 如果 $e' = e'_1, \cdots, e'_n$ 是另一个标架, 满足

$$e'_i(z) = \sum g_{ij}(z) e_j(z),$$

那么,

$$De'_i = \sum dg_{ij} \cdot e_j + \sum g_{ik} \theta_{kj} \cdot e_j,$$

使得

$$\theta_{e'} = dg \cdot g^{-1} + g \cdot \theta_e \cdot g^{-1} \quad (g = (g_{ij}))。$$

在矢量丛 E 上一般"没有"自然的联络。但是, 如果 M 是复的, E 是厄米的, 我们可以提出两个要求, 以选择到标准的联络。

1. 利用分解 $T^* = T^{*\prime} \oplus T^{*\prime\prime}$, 我们可以写出 $D = D' + D''$, 其中, $D' : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^{1,0}(E)$ 和 $D'' : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^{0,1}(E)$。现在, 我们可以说, 如果 $D'' = \bar{\partial}$, 那么, E 上的联络 D 与复结构相容。

2. 如果 E 是厄米的, 那么, 如果

$$d(\xi, \eta) = (D\xi, \eta) + (\xi, D\eta),$$

D 称为与度量相容。

引理: *如果 E 是厄米矢量丛, 那么 E 上只有一个联络, 既相容于度量, 又相容于复结构。*

证明: 设 $e = e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的全纯标架, 并且设 $h_{ij} = (e_i, e_j)$。如果这样的 D 存在, 在 e 下它的矩阵 θ 必须是 $(1,0)$ 型的, 并且因此

$$\begin{aligned} dh_{ij} &= d(e_i, e_j) \\ &= \sum_k \theta_{ik} h_{kj} + \sum_k \bar{\theta}_{jk} h_{ik} \\ &= (1,0)\text{型} + (0,1)\text{型}。 \end{aligned}$$

将型进行比较, 我们得到

$$\begin{aligned} \partial h_{ij} &= \sum \theta_{ik} h_{kj}, \quad \text{即} \quad \partial h = \theta h, \\ \bar{\partial} h_{ij} &= \sum \bar{\theta}_{jk} h_{ik}, \quad \text{即} \quad \bar{\partial} h = h^t \bar{\theta}, \end{aligned}$$

并且我们得到 $\Theta = \sum \partial h \cdot h^{-1}$ 是两个方程的唯一解。因为 θ 被相容条件所确定, 所以 θ 在整体上有明确的定义。 证毕

E 上相容于复结构和度量结构的唯一联络称为伴随联络或度量联络。就象在证明中提到的, 在全纯标架中它的矩阵是 $(1,0)$ 型的; 另一方面, 如果 $e_1, \cdots, e_n$ 是幺正标架, 那么

$$0 = d(e_i, e_j) = \theta_{ij} + \bar{\theta}_{ji},$$

所以, 在幺正标架中, 它是矩阵是反厄米的。

厄米矢量丛的度量联络对丛运算有好的性质, 正如在下面两个引理中一样。

引理: 设 $E \to M$ 是厄米矢量丛, $F \subset E$ 是全纯子丛。那么, F 本身是度量联络为 D_F 的厄米丛。另一方面, E 的度量联络 D_E 和度量诱导的直和分解 $E = F \oplus F^{\perp}$ 在 F 中给出度量 $\pi_F D_E$, 并且

$$D_F = \pi_F \circ D_E,$$

其中, π_F 是到 F 上的投影。

证明: 如果 ζ 是 F 的截面, 那么, $(\pi_F \circ D_E)''(\zeta) = \pi_F(D_E''\zeta) = \pi_F(\bar{\partial}\zeta) = \bar{\partial}\zeta$, 使得 $\pi_F \circ D_E$ 与复结构相容。如果 ζ, ζ' 是 F 的截面, 那么,

$$\begin{aligned} d(\zeta, \zeta') &= (D_E\zeta, \zeta') + (\zeta, D_E\zeta') \\ &= (\pi_F \circ D_E\zeta, \zeta') + (\zeta, \pi_F \circ D_E\zeta'), \end{aligned}$$

使得 $\pi_F \circ D_E$ 与度量相容。 证毕

类似地, 如果 E, E' 是厄米矢量丛, 那么在 $E \otimes E'$ 上有一个自然度量, 对 $\lambda, \delta \in E_x, \lambda', \delta' \in E'_x$, 它由下式给出:

$$(\lambda \otimes \lambda', \delta \otimes \delta') = (\lambda, \delta) \cdot (\lambda', \delta')。$$

设 $D_E, D_{E'}, D_{E\otimes E'}$ 分别表示 $E, E', E \otimes E'$ 的度量联络, 并且设 $\Delta_E \otimes 1$ 是 $E \otimes E'$ 上的联络, 由

$$(D_E \otimes 1)(\zeta \otimes \xi) = D\zeta \otimes \xi;$$

给出; 类似定义 $1 \otimes D_{E'}$。那么我们得到

引理:

$$D_{E \otimes E'} = D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'}。$$

证明: 显然, $(D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'})'' = \bar{\partial}$; 因此, 我们只需验证与度量结构的相容性。设 ζ, ξ 是 E 的截面, ζ', ξ' 是 E' 的截面。那么,

$$\begin{aligned} d(\zeta \otimes \zeta', \xi \otimes \xi') &= (\zeta', \xi')((D_E\zeta, \xi) + (\zeta, D_E\xi)) + (\zeta, \xi)((D_{E'}\zeta', \xi') + (\zeta', D_{E'}\xi')) \\ &= ((D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'})(\zeta \otimes \zeta'), \xi \otimes \xi') \\ &\quad + (\zeta \otimes \zeta', (D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'})(\xi \otimes \xi'))。 \end{aligned}$$

证毕

最后, 注意, 全纯丛 E 上的厄米度量诱导了 E^* 上的度量——如果 e 是 E 的幺正标架, e^* 是 E^* 的对偶标架, 设

$$(e_i^*, e_j^*) = \delta_{ij}$$

——并且 E^* 上的度量联络 D^* 可以通过

$$d\langle \sigma, \tau \rangle = \langle D\sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, D^*\tau \rangle$$

来定义, 其中, $\sigma \in \mathscr{A}^0(E)(U), \tau \in \mathscr{A}^0(E^*)(U)$。

现在, 回到一般性讨论, 在复矢量丛 $E \to M$ 上给定一个联络 D, 我们可以通过对 $\psi \in \mathscr{A}^p(U), \xi \in \mathscr{A}^0(E)(U)$ 附加 Leibniz 法则

$$D(\psi \wedge \xi) = d\psi \otimes \xi + (-1)^p \psi \wedge D\xi$$

来定义运算

$$D : \mathscr{A}^p(E) \to \mathscr{A}^{p+1}(E)。$$

特别是, 我们可以讨论算子

$$D^2 : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^2(E)。$$

关于 D^2 的第一个结果是, 它在 $\mathscr{A}^0$ 上是线性的, 即, 对 E 的截面 σ 和一个 C^∞ 函数 f,

$$\begin{aligned} D^2(f \cdot \sigma) &= D(df \otimes \sigma + f \cdot D\sigma) \\ &= -df \wedge D\sigma + df \wedge D\sigma + f \cdot D^2\sigma \\ &= f \cdot D^2\sigma。 \end{aligned}$$

因此, 映射 $D^2 : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^2(E)$ 由丛映射 $E \to \wedge^2 T^* \otimes E$ 所诱导, 或者换句话说, D^2 对应于丛

$$\wedge^2 T^* \otimes \mathrm{Hom}(E, E) = \wedge^2 T^* \otimes (E^* \otimes E)$$

的整体截面 Θ。如果 e 是 E 的标架, 那么, 用 $E^* \otimes E$ 的标架 $\{e_i^* \otimes e_j\}$ 的方式, 我们可以用2形式矩阵 Θ_e 来表示 $\Theta \in A^2(E^* \otimes E)$——即, 我们可以得到

$$D^2 e_i = \sum \Theta_{ij} \otimes e_j;$$

Θ_e 称为标架 e 下 D 的曲率矩阵。如果 $\{e_i' = \sum g_{ij} e_j\}$ 是另外一个标架, 那么,

$$\begin{aligned} D^2 e_i' &= D^2 \left(\sum g_{ij} e_j \right) \\ &= \sum g_{ij} \Theta_{ij} e_k \\ &= \sum g_{ij} \Theta_{jk} g_{kl}^{-1} e_l', \end{aligned}$$

即,

$$\Theta_{e'} = g \cdot \Theta_e \cdot g^{-1}。$$

曲率矩阵容易用联络矩阵的方式来表达: 由定义

$$\begin{aligned} D^2 e_i &= D \left(\sum \theta_{ij} \otimes e_j \right) \\ &= \sum \left(d\theta_{ij} - \sum \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} \right) \otimes e_j。 \end{aligned}$$

从而, 用矩阵记号,

$$\Theta_e = d\theta_e - \theta_e \wedge \theta_e。$$

这称为*Cartan* 结构方程。

在全纯情况下, 我们可以更多地讨论 Θ。如果 $E \to M$ 是厄米的, E 上的联络 D 与复结构相容, 那么, $D'' = \bar{\partial}$ 意味着 $D''^2 = 0$, 并且因此 $\Theta^{0,2} = 0$。还有, 如果 D 与度量相容, 那么, 在幺正标架 e 下, 联络矩阵 θ_e 是反厄米的, 并且因此 $\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta$; 因此得到 $\Theta^{2,0} = -{}^t\bar{\Theta}^{0,2} = 0$。因为 Θ 的型显然在标架变化下不变, 所以我们得到, *厄米丛上度量联络的曲率矩阵是 $(1,1)$ 形式的厄米矩阵*。

在结束本节之前, 我们计算两个特殊情形下厄米丛的度量联络和曲率矩阵。

首先回想一下, 对厄米丛 E 及其度量联络 D, E^* 上的度量联络 D^* 对所有 $\sigma \in \mathscr{A}^0(E)(U), \tau \in \mathscr{A}^0(E^*)(U)$, 满足

$$d\langle \sigma, \tau \rangle = \langle D\sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, D^*\tau \rangle。$$

特别是, 如果 e 是 E 的标架, e^* 是 E^* 中的对偶标架, θ 和 θ^* 是相应的联络矩阵, 那么, 我们得到

$$0 = d\langle e_i, e_j^* \rangle = \theta_{ij} + \theta_{ji}^*,$$

使得 $\theta = -{}^t\theta^*$。

由此, 当我们讨论厄米流形的全纯切丛上的度量联络时, 出现了一个特殊情形: 我们可以把全纯余切丛上的对偶联络 D^* 与通常的外微分进行比较。因此,

$$D^* : A^{1,0} \to A^{1,0} \otimes A^1 = (A^{1,0} \otimes A^{1,0}) \oplus (A^{1,0} \otimes A^{0,1})$$
$$d : A^{1,0} \to A^{2,0} \oplus (A^{1,0} \otimes A^{0,1})。$$

因为 D^* 与复结构相容, 所以有 $D^{*\prime\prime}=\bar\partial$; 即, 两个算子在因子 $A^{1,0}\otimes A^{0,1}$ 中一致。就象即将看到的那样, 这为我们计算 D 的联络矩阵提供了有效的方法。设 $ds^2=\sum h_{ij}dz_i\otimes d\bar z_j=\sum\varphi_i\otimes\bar\varphi_i$ 为 M 上的厄米度量。

引理: 存在一个唯一的 1形式矩阵 ψ_{ij}, 使得 $\psi+{}^t\bar\psi=0$, 并且

$$(*)\qquad d\varphi_i=\sum_j\psi_{ij}\wedge\varphi_j+\tau_i,$$

其中 τ_i 是 $(2,0)$ 型的。

证明: 对 ψ 的型式分解写出 $\psi=\psi'+\psi''$。那么,

$$\bar\partial\varphi_i=\sum\psi''_{ij}\wedge\varphi_j$$

确定了 ψ'', 并且 $\psi+^t\bar\psi=0\Rightarrow\psi'=-{}^t\bar\psi''$。(显然, 如果我们写出 $\varphi_i=\sum a_{ij}dz_j$, 其中 $a^t\bar a=h$, 那么我们得到,

$$\begin{aligned}\bar\partial\varphi_i&=\sum_k\bar\partial a_{ik}\wedge dz_k\\&=\sum_{j,k}\bar\partial a_{ik}\wedge a^{-1}_{kj}\cdot\varphi_j,\end{aligned}$$

所以 $\psi''=\bar\partial aa^{-1}$。) 证毕

设 $v=v_1,\cdots,v_n$ 是对偶于标架 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的切丛 $T'(M)$ 的标架; 设 θ 是标架 v 下 D 的联络矩阵, θ^* 是标架 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 下 D^* 的联络矩阵。那么,

$$\begin{aligned}D^{*\prime\prime}=\bar\partial\quad&\Rightarrow\quad\theta^{*\prime\prime}=\psi''\\&\Rightarrow\quad\theta^*=\psi,\end{aligned}$$

这是因为 $\theta^*+^t\bar\theta^*=0$ 和 $\psi+^t\bar\psi=0$。因此我们得到

$$\theta=-{}^t\theta^*=-{}^t\psi。$$

总之, 利用基本结构方程 $(*)$, 我们可以通过得到幺正余标架的外微分 $d\varphi_i$ 来确定全纯切丛 $T'(M)$ 中的联络矩阵 $\theta=-{}^t\psi$。矢量 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 称为挠率; 如果它的挠率等于零, 那么度量称为*Kähler*的。后面我们将给出 Kähler 条件的其它定义。

例子

设 M 是局域坐标为 z 的 Riemann 曲面; M 上的度量由

$$ds^2=h^2dz\otimes d\bar z=\varphi\otimes\bar\varphi$$

给出, 其中 $\varphi=hdz$。那么,

$$d\varphi=\bar\partial h\wedge dz=\frac{\bar\partial h}{h}\wedge\varphi,$$

所以 $\psi'' = \bar{\partial}\log h$ 和 $\psi = (\bar{\partial} - \partial)\log h$; 由结构方程, 切丛上的度量联络的矩阵为

$$\begin{aligned}\theta &= -\psi = (\partial - \bar{\partial})\log h \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\log h \cdot dz - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\log h \cdot d\bar{z}。\end{aligned}$$

现在, $\theta \wedge \theta = 0$, 所以由 Cartan 结构方程得到

$$\begin{aligned}\Theta - d\theta &= -2\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\log h\right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log h \cdot dz \wedge d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2}\Delta \log h \cdot dz \wedge d\bar{z}。\end{aligned}$$

把曲率"矩阵" Θ 与伴随 $(1,1)$ 形式 $\Phi = (\sqrt{-1}/2)\varphi \wedge \bar{\varphi} = (\sqrt{-1}/2)h^2 dz \wedge d\bar{z}$ 比较, 我们得到

$$\sqrt{-1}\Theta = K \cdot \Phi,$$

其中, $K = (-\Delta \log h)/h^2$ 是通常的$Guass$ 曲率。

我们的第二个计算包括厄米丛的子丛和商丛的曲率算子。虽然我们不能做完全的计算, 但是可得到 C^∞ 和全纯情形下一个根本的不同: 出现在厄米丛曲率中的正负号。

设 $E \to M$ 是厄米丛, $S \subset E$ 是全纯子丛, $Q = E/S$ 是商丛。就象先前提到的那样, 作为 C^∞ 矢量丛, Q 同构于 E 中 S 的正交补 $S^\perp$, 并且因此 S 和 Q 都从 E 中继承了厄米结构; 设 D_E, D_S, D_Q 表示相应的度量联络。由第32(37)页的引理, D_S 等于算子

$$D_E|_{\mathscr{A}^0(S)} : \mathscr{A}^0(S) \to \mathscr{A}^1(E)$$

与投影 $\mathscr{A}^1(E) \to \mathscr{A}^1(S)$ 的复合; 因此, 算子

$$A = D_E|_{\mathscr{A}^0(S)} - D_S$$

把 $\mathscr{A}^0(S)$ 映射到 $\mathscr{A}^1(Q)$。 A 称为 E 中 S 的*第二基本形式*; 显然, 它是 $(1,0)$ 型的并且在 C^∞ 函数上是线性的, 即,

$$A \in \mathscr{A}^{1,0}(\mathrm{Hom}(S,Q))。$$

为了计算曲率, 我们选择 E 是幺正标架 $e_1, \cdots, e_r$, 使得 $e_1, \cdots, e_s$ 是 S 的标架。利用这个标架和我们的引理, E 的联络矩阵是

$$\theta_E = \begin{pmatrix} \theta_s & {}^t\bar{A} \\ A & \theta_Q \end{pmatrix},$$

其中, θ_S, θ_Q 是 S 和 Q 各自的联络矩阵。那么,

$$\begin{aligned}\Theta_E &= d\theta_E - \theta_E \wedge \theta_E \\ &= \begin{bmatrix} d\theta_S - \theta_S \wedge \theta_S -{}^t \bar{A} \wedge A & * \\ * & d\theta_Q - \theta_Q \wedge \theta_Q - A \wedge {}^t\bar{A} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

它意味着,

$$\begin{aligned}\Theta_S &= \Theta_E|_S +{}^t\bar{A}\wedge A,\\ \Theta_Q &= \Theta_E|_Q + A\wedge {}^t\bar{A}。\end{aligned}$$

现在, 我们称曲率算子

$$\Theta\in A^2(\mathrm{Hom}(E,E))$$

在 $x\in M$ 是**正定的**, 如果对 $\lambda\neq 0\in E_x$, 多重矢量

$$(\lambda,\Theta\lambda)\in\wedge^2T_x^*(M)$$

是正定 $(1,1)$ 型的, 或者等价地, 如果对任意全纯切丛 $v\in T_x'(M)$, 厄米矩阵

$$-\sqrt{-1}\langle\Theta(x);v,\bar{v}\rangle\in\mathrm{Hom}(E_x,E_x)$$

是正定的。如果 Θ 是处处正定的, 我们写作 $\Theta>0$, 如果是半正定的, $\Theta\geqslant 0$, 如果 $\Theta-\Theta'>0$, $\Theta>\Theta'$。

设 A 是上述子丛 $S\subset E$ 的第二基本形式, 并且写作

$$A=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ s<\lambda\leqslant r}}a_{\lambda j}^{\alpha}dz_{\alpha}\otimes e_{\lambda}\otimes e_j^*,$$

所以,

$${}^t\bar{A}=\sum\bar{a}_{\lambda j}^{\alpha}d\bar{z}_{\alpha}\otimes e_{\lambda}^*\otimes e_j$$

和

$$A\wedge{}^t\bar{A}=\sum a_{ik}^{\alpha}\bar{a}_{jk}^{\beta}dz_{\alpha}\wedge d\bar{z}_{\beta}\otimes e_i\otimes e_j^*。$$

因此, 如果我们设 $A^{\alpha}=(a_{ij}^{\alpha})$, 那么,

$$\left\langle A\wedge{}^t\bar{A};\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}},\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{\alpha}}\right\rangle=\sum a_{ik}^{\alpha}\bar{a}_{jk}^{\alpha}e_i\otimes e_j^*=A^{\alpha}\cdot{}^t\bar{A}^{\alpha}\geqslant 0,$$

它意味着

$$\begin{aligned}\Theta_S &\leqslant \Theta_E|_S,\\ \Theta_Q &\geqslant \Theta_E|_Q,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $A\equiv 0$。**曲率在全纯子丛中减小且在全纯商丛中增加**, 这个原理与实情形大不相同。

例如, 如果 $M\subset\mathbb{C}^n$ 是复子流形, 度量从 $\mathbb{C}^n$ 中的欧氏度量诱导而得到, 我们得到,

$$T'(M)\subset T'(M)|M\Rightarrow\Theta_M\leqslant\Theta_{\mathbb{C}^n}|_M=0。$$

如果 M 是 Riemann 曲面, 那么, 由第69(77)页的计算, 这就意味着它的 Guass 曲率 $K \leqslant 0$。

来自这个计算的另一个基本结果如下: 假设 $E \to M$ 是全纯丛, 存在整体全纯截面 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \Gamma(M, E)$ 使得对所有 $x \in M$, $\{\sigma_1(x), \cdots, \sigma_n(x)\}$ 生成 E_x。那么, 对所有 $x \in M, \lambda \in \mathbb{C}^n$ 我们有一个由

$$(x, \lambda) \to \sum \lambda_i \sigma_i(x) \in E_x$$

给出的全纯丛满射

$$M \times \mathbb{C}^n \to E \to 0,$$

因此, 如果我们把从 $M \times \mathbb{C}^n$ 上的欧氏度量诱导的度量赋予 E, 那么,

$$\Theta_E \geqslant 0;$$

即, 有有限多生成每根纤维的整体截面的任意全纯丛有非负曲率的度量。

在矢量丛曲率的正负号和整体截面的存在性之间的联系在复流形理论中是根本性的。

6. 紧致复流形上的调和理论

Hodge 定理

本节讨论 $\bar{\partial}$ 的 Hodge 定理的陈述和证明以及其直接推论。

M 是复维数为 n 的连通紧致复流形。我们选择一个幺正余标架 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 下的厄米度量 ds^2 和伴随 $(1,1)$ 形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_j \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_j。$$

度量 ds^2 在所有张量丛 $T^{*(p,q)}(M)$ 上诱导了一个厄米度量; 把基 $\{\varphi_I(z) \wedge \bar{\varphi}_J(z)\}_{\# I=p, \# J=q}$ 取为正交的并且长度为 $\|\varphi_I \wedge \bar{\varphi}_J\|^2 = 2^{p+q}$ (回想一下在 $\mathbb{C}^n$ 上, $\|dz_i\|^2 = 2$)就给出了 $T_Z^{*(p,q)}(M)$ 中的内积。设 $C_n = (-1)^{n(n-1)/2}(\sqrt{-1}/2)^n$ 和

$$\Phi = \frac{\omega^n}{n!} = C_n \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\varphi}_n$$

是 M 上伴随于度量的体积形式。整体内积

$$(\psi, \eta) = \int_M (\psi(z), \eta(z)) \Phi(z)$$

把空间 $A^{p,q}(M)$ 变成准 Hilbert 空间。我们提出问题: 给定一个 $\bar{\partial}$ 闭形式 $\psi \in Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$, 在表示 φ 的所有 *Dolbeault* 上同调类 $[\psi] \in H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ 的形式 $\{\psi + \bar{\partial}\eta\}$ 中, 我们可以找到最小范数的那个吗? 为了回答它, 我们暂时自称 $A^{p,q}$ 是完备的, $\bar{\partial}$ 是有界的, 并且通过对所有 $\eta \in A^{p,q-1}(M)$ 要求

$$(\bar{\partial}^* \psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial}\eta)$$

来定义伴随算子

$$\bar{\partial}^* : A^{p,q}(M) \to A^{p,q-1}(M)。$$

这将在一会儿后证明是正当的, 但是我们首先证明

引理: $\bar{\partial}$ 闭形式 $\psi \in Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ 在 $\psi + \bar{\partial}A^{p,q-1}(M)$ 中有最小范数, 当且仅当 $\bar{\partial}^* = 0$。

证明: 如果 $\bar{\partial}^*\psi = 0$, 那么, 对 $\bar{\partial}\eta = 0$ 的任意 $\eta \in A^{p,q-1}(M)$,

$$\begin{aligned}
\|\psi + \bar{\partial}\eta\|^2 &= (\psi + \bar{\partial}\eta, \psi + \bar{\partial}\eta) \\
&= \|\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\eta\|^2 + 2\mathrm{Re}(\psi, \bar{\partial}\eta) \\
&= \|\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\eta\|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{\partial}^*\psi, \eta) \\
&= \|\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\eta\|^2 \\
&> \|\psi\|^2,
\end{aligned}$$

所以 ψ 有最小范数。反过来, 如果 ψ 有最小范数, 那么对任意 $\eta \in A^{p,q-1}(M)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\psi + t\bar{\partial}\eta\|^2(0) = 0。$$

但是在 $t = 0$ 处,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi + t\bar{\partial}\eta, \psi + t\bar{\partial}\eta) = 2\mathrm{Re}(\psi, \bar{\partial}\eta)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi + t\bar{\partial}(i\eta), \psi + t\bar{\partial}(i\eta)) = 2\mathrm{Im}(\psi, \bar{\partial}\eta)。$$

所以, 对所有的 $\eta \in A^{p,q-1}(M)$,

$$(\bar{\partial}^*\psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial}\eta) = 0,$$

并且因此 $\bar{\partial}^*\psi = 0$。 证毕

因此, 至少在形式上, Dolbeault 上同调群 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)/\bar{\partial}A^{p,q-1}(M)$ 正好用两个一阶方程

$$\bar{\partial}\psi = 0, \qquad \bar{\partial}^*\psi = 0$$

的解来表示。这两个方程可以用一个二阶方程

$$\Delta_{\bar{\partial}}\psi = (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\psi = 0$$

来代替: 显然, $\bar{\partial}\psi = 0 = \bar{\partial}^*\psi \Rightarrow \Delta\psi = 0$, 反过来,

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\bar{\partial}}\psi, \psi) &= (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\psi, \psi) + (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\psi, \psi) \\
&= \|\bar{\partial}^*\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\psi\|^2,
\end{aligned}$$

所以 $\Delta\psi=0\Rightarrow\bar\partial\psi=\bar\partial^*\psi=0$。算子

$$\Delta_{\bar\partial}:A^{p,q}(M)\to A^{p,q}(M)$$

称为 $\bar\partial$-*Laplace* 算子, 或者简称 *Laplace* 算子(写作 Δ), 只要不会混淆。满足 *Laplace* 方程

$$\Delta\psi=0$$

的微分形式称为调和形式; (p,q) 型调和形式的空间表示为 $\mathscr{H}^{p,q}(M)$, 并且称为调和空间。上面形式上讨论的是同构

$$(*)\qquad \mathscr{H}^{p,q}(M)\cong H^{p,q}_{\bar\partial}(M);$$

如果它可以证明, 那么对每个上同调类都有一个唯一的表示, 这当然是有利的。同构 $(*)$ 是 Hodge 定理的一部分, 它的证明和 $(*)$ 的推论是本节的内容。

我们从给出伴随算子 $\bar\partial^*$ 的具体公式从而证明它的存在性开始。首先定义 $*$ 算子或对偶算子,

$$*:A^{p,q}(M)\to A^{n-p,n-q}(M),$$

它要求对所有 $\psi\in A^{p,q}$, 满足

$$(\psi(z),\eta(z))\Phi(z)=\psi(z)\wedge{}^*\eta(z)。$$

这是一个代数算子, 它在局域上如下给出: 如果我们写出

$$\eta=\sum_{I,J}\eta_{I\bar J}\varphi_I\wedge\bar\varphi_J,$$

那么,

$$*\eta=2^{p+q-n}\sum_{I,J}\varepsilon_{IJ}\bar\eta_{I\bar J}\varphi_{I^0}\wedge\bar\varphi_{J^0},$$

其中, $I_0=\{1,\cdots,n\}-I$, $\varepsilon_{I,J}$ 是下列置换的符号:

$$(1,\cdots,n,1',\cdots,n')\to(i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_p,i_1^0,\cdots,i_{n-p}^0,j_1^0,\cdots,j_{n-q}^0)。$$

计算出符号则得到

$$**\eta=(-1)^{p+q}\eta。$$

用 $*$ 算子的方式, 伴随算子为

$$\bar\partial^*=-*\bar\partial*。$$

的确, 对 $\psi\in A^{p,q-1}(M)$ 和 $\eta\in A^{p,q}(M)$, 我们得到

$$\begin{aligned}(\bar\partial\psi,\eta)&=\int_M\bar\partial\psi\wedge*\eta\\&=(-1)^{p+q}\int_M\psi\wedge\bar\partial*\eta+\int_M\bar\partial(\psi\wedge*\eta)。\end{aligned}$$

因为在 $(n, n-1)$ 型的形式上 $\bar{\partial} = d$, 所以由 Stokes 定理, 右边的第二项为

$$\int_M d(\psi \wedge *\eta) = 0。$$

因此, 对所有 ψ,

$$(\bar{\partial}\psi, \eta) = -\int_M \psi \wedge *(*\bar{\partial} * \eta),$$

使得 $\bar{\partial}^*$ 算子由上式得到定义。注意, $\bar{\partial}^2 = 0 \Rightarrow \bar{\partial}^{*2} = 0$。

现在我们暂时离题一下来解释 Laplace 算子和调和这两个术语的来源。假如我们处理有紧致支集的形式, 上述定义对任意复流形都成立。有理由相信, 欧氏度量的 $\mathbb{C}^n$ 将为正在讨论的问题提供一个好的局域近似。假设我们取 $p = q = 0$, 并且写出 $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$。那么, 对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$,

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \bar{\partial} * \bar{\partial} f \\
&= \bar{\partial}^* \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \\
&= *\bar{\partial} \left(2^{1-n} \sum \pm \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}} dz \wedge d\bar{z}_j^0 \right) \\
&= * \left(2^{1-n} \sum_j -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}} \right) \right) dz \wedge d\bar{z} \\
&= v * \left(2^{1-n} \sum_j -\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) dz \wedge d\bar{z} \\
&= \left(2 \sum_j -\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right)。
\end{aligned}$$

因为

$$2\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right),$$

所以, 除了一个常数外, 我们发现, $\Delta(f)$ 是 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 中函数上的通常 Laplace 算子。稍后, 在 Kähler 流形的讨论中, 这个计算将被扩张以证明

$$\Delta(f dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \left(-2 \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

它解释了 $\mathbb{C}^n$ 中紧致支集形式的术语。

回到我们的紧致复流形 M, 我们的目标是著名的

Hodge 定理:

1. $\dim \mathscr{H}^{p,q}(M) < \infty$;

2. 由于上式, 正交投影

$$\mathscr{H}: A^{p,q}(M) \to \mathscr{H}^{p,q}(M)$$

有明确的定义, 并且存在唯一一个算子——*Green* 算子,

$$G: A^{p,q}(M) \to A^{p,q}(M),$$

其中, 在 $A^{p,q}(M)$ 上有 $G(\mathscr{H}^{p,q}(M)) = 0, \bar{\partial}G = G\bar{\partial}, \bar{\partial}^* G = G\bar{\partial}^*$ 并且

$$(**) \qquad I = \mathscr{H} + \Delta G。$$

在形式中, 方程 $(**)$

$$\psi = \mathscr{H}(\psi) + \bar{\partial}(\bar{\partial}^* G\psi) + \bar{\partial}^*(\bar{\partial}G\psi)$$

称为形式的 *Hodge* 分解, 这是因为它直接意味着正交直和分解

$$A^{p,q}(M) = \mathscr{H}^{p,q}(M) \oplus \bar{\partial}A^{p,q-1}(M) \oplus \bar{\partial}^* A^{p,q+1}(M)。$$

$(**)$ 的内容有时口头表述为, 给定 η, 方程

$$\Delta\psi = \eta$$

有一个解 ψ, 当且仅当 $\mathscr{H}(\eta) = 0$, 并且因此

$$\psi = G(\eta)$$

是满足 $\mathscr{H}(\psi) = 0$ 的唯一解。所以, 实际上我们要做的是在紧致流形上解 Laplace 方程。想法是首先在弱的意义中解这个方程——即, 在 $A^{p,q}(M)$ 的 Hilbert 完备化空间 $\mathscr{L}^{p,q}(M)$ 中找到一个 ψ, 使得对所有的 $\varphi \in A^{p,q}(M)$,

$$(\psi, \Delta\varphi) = (\eta, \varphi),$$

——接着再证明这个 ψ 实际上是 C^∞ 的。第一步就是形式上的 Hilbert 空间理论, 第二步——通常称为正则定理——至少是个局域问题, 因为 φ 可以写作在坐标补丁中有紧致支集的形式的和。

Hodge 定理的证明 I: 局域理论

这里给出的 Hodge 定理的证明利用了 Hilbert 空间的初等方法。我们在仿射子空间 $\psi + \bar{\partial}A^{p,q-1}(M) \subset A^{p,q}(M)$ 中寻找最小范数的元素。显然, 这样的元素可以直接通过正交投影, 在准 Hilbert 空间 $A^{p,q}(M)$ 的完备化空间 $\mathscr{L}^{p,q}(M)$ 中的 $\psi + \bar{\partial}A^{p,q-1}(M)$ 的闭集中找到。那么, 问题是要证明, 用这种方法找到的元素实际上处在 $A^{p,q}(M)$ 中。我们通过讨论环面上的函数开始。它将提供在基本估计之下的公式的一个模型; 还有, 通过描述出环面上欧氏 Laplace 算子的性质, 我们将获得一般情况下所期望的一些想法。

设 T 是实环面 $(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n$, 坐标为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$。用 $\mathscr{F}$ 表述形式的 Fourier 级数

$$u=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}u_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$$

的空间。*Sobolev* s-范数由

$$\|u\|_s^2=\sum_\xi(1+\|\xi\|^2)^s|u_\xi|^2$$

给出, 并且我们用

$$H_s=\{u\in\mathscr{F}:\|u\|_s<\infty\}$$

来定义 *Sobolev* 空间 H_s。它们是 Hilbert 空间; 我们显然得到一个包含序列

$$\subset H_{-n}\subset H_{-n+1}\subset\cdots\subset H_{-1}\subset H_0\subset H_1\subset\cdots\subset H_n\subset\cdots,$$

并且我们设

$$H_\infty=\cap H_s,\qquad H_{-\infty}=\cup H_s。$$

现在, 设 $C^s(T)$ 是 T 上 s 类函数。函数 $\varphi\in C^0(T)$ 有一个 Fourier 级数展开 $\sum\varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$, 其中,

$$\varphi_\xi=\int_T\varphi(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}dx\quad\left(dx=\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{(2\pi)^n}\right)。$$

我们得到 *Parseval* 等式

$$\begin{aligned}\int_T|\varphi|^2&=\int_T(\sum\varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle})(\sum\bar{\varphi}_{\xi'}e^{-i\langle\xi',x\rangle})\\&=\int_T\varphi_\xi\bar{\varphi}_{\xi'}e^{i\langle\xi-\xi',x\rangle}dx\\&=\int_T\sum_\xi|\varphi_\xi|^2dx\\&=\sum_\xi|\varphi_\xi|^2,\end{aligned}$$

使得 $C^0(T)$ 单射地映入 H_0, 其中 $\|\quad\|_0$ 作为 $C^0(T)$ 上的 L^2 范数。利用部分求和和 Cauchy–Schwartz 不等式, 可证明这个极限互换是允许的。

我们设 $D_j=(1/\sqrt{-1})(\partial/\partial x_j)$, 并且采用标准多重指标记号

$$\begin{aligned}D^\alpha&=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\\ [\alpha]&=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\\ \xi^\alpha&=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\end{aligned}$$

由分部积分,

$$\int_T D^\alpha\varphi\cdot\bar{\psi}=\int\varphi\overline{D^\alpha\psi},\quad\varphi,\psi\in C^\infty(T),$$

并且因此对 $\varphi \in C^s(T)$ 和 $[\alpha] \leqslant s$ 有

$$\begin{aligned}(D^\alpha\varphi)_\xi &= \int D^\alpha\varphi e^{-i\langle\xi,x\rangle}dx \\ &= \int_T \varphi\xi^\alpha e^{-i\langle\xi,x\rangle}dx \\ &= \xi^\alpha\varphi_\xi,\end{aligned}$$

即,

$$\|D^\alpha\varphi\|_0^2 = \sum_\xi |\xi^\alpha|^2|\varphi_\xi|^2。$$

因此, 存在一个包含关系

$$C^s(T) \subset H_s,$$

并且从

$$\sum_{[\alpha]\leqslant s}|\xi^{2\alpha}| \leqslant (1+\|\xi\|^2)^s \leqslant C_s\sum_{[\alpha]\leqslant s}|\xi^{2\alpha}|,$$

我们得到, 在 $C^s(T) \subset H_s$ 上, Sobolev 范数 $\|\quad\|_s$ 等价于

$$\sum_{[\alpha]\leqslant s}\|D^\alpha\varphi\|_0^2,$$

我们可以把它描述为函数 φ 的 L^2 范数及其到 s 阶的微分。的确, H_s 是在这个范数中 $C^\infty(T)$ 的完备化。

它有一个部分逆结果, 即重要的

Sobolev 引理: *$H_{s+[n/2]+1} \subset C^s(T)$; 即, 每个 $u \in H_{s+[n/2]+1}$ 是函数 $\varphi \in C^s(T)$ 的 Fourier 级数, 并且这个级数一致收敛到 φ。*

证明: 首先, 考虑 $s = 0$ 的情形; 设

$$u = \sum_\xi u_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle},$$

其中,

$$\sum_\xi(1+\|\xi\|^2)^{[n/2]+1}|u_\xi|^2 < \infty。$$

部分求和

$$S_R = \sum_{\|\xi\|\leqslant R}u_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$$

是连续的, 并且对 $R \leqslant R'$,

$$|S_R(x) - S_{R'}(x)| \leqslant \sum_{\|\xi\|\geqslant R}|u_\xi|$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\|\xi\|\geqslant R} \frac{\left((1+\|\xi\|^2)^{[n/2]+1}|u_\xi|^2\right)^{1/2}}{\left((1+\|\xi\|^2)^{[n/2]+1}\right)^{1/2}} \\ &\leqslant \|u\|_{[n/2]+1}\left[\sum_{\|\xi\|\geqslant R}\left(\frac{1}{(1+\|\xi\|^2)^{[n/2]+1}}\right)^{1/2}\right]。\end{aligned}$$

现在, 在 $\mathbb{R}^n$ 中应用积分检验法得到

$$\sum_{\xi}\left(\frac{1}{(1+\|\xi\|^2)^{[n/2]+1}}\right)^{1/2} \leqslant \sum_{\xi\neq 0}\frac{1}{\|\xi\|^{n+1}}$$

收敛, 由它得到 $S_R(x)$ 一致收敛到 $\varphi \in C^0(T)$, 其中 $\varphi_\xi = u_\xi$。

现在, 我们在 s 上进行归纳。因为在我们刚刚得到的以及单变量情况之外, 对一般 n 的证明只包括了无关紧要的公式, 所以我们只对 $n=1$ 完成讨论即可。

因此, 我们假设 $H_{s+1} \subset C^s(T)$ 和

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} u_\xi e^{i\xi x}$$

满足 $u \in H_{s+2}$, 即,

$$\sum_{\xi} |\xi|^{2s+4}|u_\xi|^2 < \infty。$$

设

$$v = \sum_{\xi\neq 0} i\xi u_\xi e^{i\xi x}。$$

那么, $v \in H_{s+1}$, 因此由归纳假设它是 $C^s(T)$ 中的函数。收敛是一致的, 所以我们可以逐项积分得到:

$$\int_0^x v(t)dt = \sum_{\xi} u_\xi e^{i\xi x}dx = u(x) - u_0,$$

所以 $u'(x) = v(x)$ 和 $u \in C^{s+1}(T)$。 证毕

总之, 我们已经证明, Fourier 级数映射 $C^0(T) \to \mathscr{F}$ 导致了包含关系

$$\begin{aligned} C^s(T) &\subset H_s, \\ H_{s+[n/2]+1} &\subset C^s(T), \\ C^\infty(T) &= H_\infty。\end{aligned}$$

一个有用的注释是: Sobolev 引理的证明给出了一个估计

$$\sup_{x\in T}|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant C_\alpha\|\varphi\|_{[n/2]+1+[\alpha]}。$$

Rellich 引理: 对 $s > r$, 包含关系

$$H_s \subset H_r$$

是紧致的。

证明: 给定一个 H_s 中的有界序列 $\{u_k\}$, 我们希望找到 H_r 中的一个收敛子序列。因为对所有 k, 我们得到

$$\sum(1+\|\xi\|^2)^r|u_{k,\xi}|^2 \leqslant \sum_{\xi}(1+\|\xi\|^2)^s|u_{k,\xi}|^2 < C,$$

对固定的 ξ, 序列 $\{(1+\|\xi\|^2)^{r/2}u_{k,\xi}\}_k$ 是有界的, 从而有一个 Cauchy 序列。通过标准对角化, 那么, 我们可以找到一个子序列 $\{u_k\}$ 使得对每个 ξ, $\{(1+\|\xi\|^2)^{r/2}u_{k,\xi}\}_k$ 是 Cauchy 序列。

现在, 我们把这个项的小 ξ——它只有有限多个——和大 ξ 分开, 其中将用到因子 $(1+\|\xi\|^2)^r$: 给定 $\varepsilon > 0$, 选择 R 和 m 使得对 $k, l \geqslant m$,

$$\begin{aligned}\frac{4C}{(1+\|\xi\|^2)^{s-r}} &< \frac{\varepsilon}{2} \quad 对\|\xi\| > R,\\ \sum_{\|\xi\|\leqslant R}(1+\|\xi\|^2)^r|u_{k,\xi}-u_{l,\xi}|^2 &< \frac{\varepsilon}{2}。\end{aligned}$$

那么,

$$\begin{aligned}\|u_k-u_l\|_r^2 &= \sum_{\|\xi\|\leqslant R}(1+\|\xi\|^2)^r|u_{k,\xi}-u_{l,\xi}|^2\\ &\quad + \sum_{\|\xi\|>R}\frac{(1+\|\xi\|^2)^s}{(1+\|\xi\|^2)^{s-r}}|u_{k,\xi}-u_{l,\xi}|^2\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。\end{aligned}$$

证毕

我们现在希望研究环面 T 上的 Laplace 方程。本质上, 我们将证明这种情况下 0 形式(或函数)的 Hodge 定理——用标准的欧氏度量和相对于外微分 d。

虽然可能不必要, 但我们还是要注释一下, 在紧致 Riemann 流形 M 上, 我们可以定义 d 的伴随算子 d^*, 它们形成 Laplace 算子 $\Delta_d = dd^* + d^*d$, 正好得到象复流形上的 $\bar\partial$ 一样的公式。当然, Hodge 定理也成立, 它的证明与我们将给出的复情况下的证明是一样的。

对 $\varphi \in C^\infty(Y)$, Laplace 算子是

$$\begin{aligned}\Delta_d\varphi &= \sum_i D_i^2\varphi\\ &= -\sum_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\\ &= -\sum_{\xi}\varphi_\xi\|\xi\|^2 e^{i\langle\xi,x\rangle}。\end{aligned}$$

我们将在某种意义上讨论方程

$$(*) \qquad \Delta_d\varphi = \psi,$$

使得结论可以延续到一般紧致流形。函数 $\varphi \in L^2(T) = H_0$ 称为 $(*)$ 的弱解, 如果对所有 $\eta \in C^\infty(T)$ 有

$$(\Delta_d \eta, \varphi) = (\eta, \psi)。$$

如果弱解还是 C^∞ 函数, 那么 Laplace 算子是自伴的, 意思是对所有 $\eta \in C^\infty(T)$,

$$(\eta, \Delta_d \varphi) = (\eta, \psi),$$

并且因此在通常的意义上 $\Delta_d \varphi = \psi$。弱解容易用 Hilbert 空间的方法找到, 并且要点是证明正则性。

我们首先注意到齐次方程

$$\Delta_d \varphi = 0$$

的弱解对所有 ξ 满足

$$(\|\xi\|^2 e^{i\langle \xi, x\rangle}, \varphi) = 0。$$

因此弱调和空间由常数函数组成, 对 $\xi \neq 0$ 由 $\varphi_\xi = 0$ 来定义。

接着, 我们观察到, 当 $\psi \in L^2(T) = H_0$ 时 $(*)$ 有意义。它有一个弱解的必要条件是 $\psi_0 = 0$, 即, ψ 应当与调和空间正交。

现在, 假设如此,

$$\varphi = -\sum_{\xi \neq 0} \frac{1}{\|\xi\|^2} \psi_\xi e^{i\langle \xi, x\rangle}$$

给出 $(*)$ 的形式 Fourier 级数解。因为显然 $\psi \in L^2(T) \Rightarrow \varphi \in L^2(T)$, 所以它是弱解。实际上我们可以得到更多:

对 $\psi \in L^2(T)$, 如果我们用

$$G(\psi) = -\sum_{\xi \neq 0} \frac{1}{\|\xi\|^2} \psi_\xi e^{i\langle \xi, x\rangle}$$

来定义 Green 算子, 那么,

$$G : H_s \to H_{s+2}$$

是一个有界线性算子。如果 ψ 垂直于调和空间, 那么

$$\varphi = G(\psi)$$

给出 $(*)$ 的弱解。由 Sobolev 引理, 如果 $\psi \in C^\infty(T)$, 那么, $\varphi \in C^\infty(T)$ 并且 φ 是通常意义上 $(*)$ 的解。最后, 由 Rellich 引理,

$$G : L^2(T) \to L^2(T)$$

是一个紧致自伴算子。在 $L^2(T)$ 上 G 的谱分解就是 Fourier 级数。

在这样的时刻, 前一段的结果不仅仅得到了环面上 0形式的 Hodge 定理。关键是: 因为 Δ 是二阶的, 所以算子

$$I+\Delta_d: H_s \to H_{s-2}$$

是平庸有界的。更重要的是, 等式

$$\|(I+\Delta_d)\varphi\|_{s-2}^2 = \|\varphi\|_s^2$$

允许我们利用闭图像定理来求 $I+\Delta_d$ 的逆。这个逆是一个紧致光滑算子, 并且包含 Green 函数的所有信息。在一般紧致流形 M 上, 如果我们延续 Sobolev 空间的公式, 并且通过运算证明基本估计

$$\|(I+\Delta_d)\varphi\|_{s-2}^2 \geqslant C_s\|\varphi\|_s^2,$$

那么我们可以期望得到象环面上一样类型的图像。

我们用有关分布的一些注释来结束 Fourier 级数的讨论, 分布定义为线性函数

$$\lambda: C^\infty(T) \to \mathbb{C},$$

对某些 k, 它在

$$|\lambda(\varphi)| \leqslant C_\lambda \sup_{\substack{[\alpha]\leqslant k\\ x\in T}} |D^\alpha\varphi(x)|$$

的意义上是连续的。每个分布形成一个形式 Fourier 级数 $\sum \lambda_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$, 其中,

$$\lambda_\xi = \lambda(e^{-i\langle\xi,x\rangle})。$$

从 λ 连续性的定义和上述 $\sup_{x\in T}|D^\alpha\varphi(x)|$ 的估计得到, 每个分布 λ 对某些 s 是 H_s 上的连续线性函数。配对

$$(u,v) = \sum_\xi u_\xi v_\xi$$

把 H_{-s} 与 H_s 的对偶等价, 使得 $\lambda \in H_{-s}$, 其中它的 Fourier 级数如上给出。如果我们用 $\mathscr{D}(T)$ 来表述分布的空间, 那么我们得到

$$\mathscr{D}(T) = H_{-\infty}。$$

分布的微分定义为

$$D^\alpha\lambda(\varphi) = \lambda(D^\alpha\varphi)。$$

$D^\alpha\lambda$ 的 Fourier 系数是 $(D^\alpha\lambda)_\xi = \xi^\alpha\lambda_\xi$。用这个定义, 通过取一个连续函数的有限次微分得到分布。

最后一个有用的术语是: 如果 $\lambda \in H_0 \subset H_{-\infty}$, 那么分布 λ 称为在 L^2 中。那么, 我们可以如下描述 Sobolev 空间:

H_s 由所有分布 λ 组成, 使得对 $[\alpha] \leqslant s$, 分布微分 $D^\alpha\lambda$ 在 L^2 中。

一个有意义的分布的例子是 δ 函数, 它的定义为

$$\delta(\varphi)=\varphi(0)。$$

它的系数 Fourier 级数为

$$\delta=\sum_{\xi}e^{i\langle\xi,x\rangle}。$$

我们在 Hodge 定理的证明中不使用分布, 但是将在第三章第一节更广泛地讨论。顺便注意, 如果对任意调和的 η 有 $\psi(\eta)=0$, 那么方程(其中的 ψ 是一个分布)

$$\Delta_d\varphi=\psi$$

是可解的。如果对任意 s——不管正负——有 $\psi\in H_s$, 那么 $\varphi\in H_{s+2}$。特别是, 正则性对分布解以及弱 Hilbert 空间解成立。为了利用 Hilbert 空间上紧致自伴算子的标准理论, 我们将采用后面的规定。

Hodge 定理的证明: 整体理论

在环面上, Sobolev s范数由加权 Fourier 级数范数或由 L^2 范数

$$\sum_{[\alpha]\leqslant s}\int_T|D^\alpha\varphi|^2dx$$

给出。后者可以推广到流形上的矢量丛, 使得 Sobolev 引理和 Rellich 引理仍然都成立。我们现在阐明怎样完成它。

首先, 假设 $U\subset V\subset\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 并且每个相对于后一个是紧致的。 U 上有紧致支集的函数可以被看作环面 T 上的函数。假设 $v_1(x),\cdots,v_n(x)$ 是 M 中的 C^∞ 矢量场, 并且处处线性独立, $\rho(x)$ 是 V 上的正定函数。对 $\varphi\in C_c^\infty(U)$, Sobolev 0和 1范数分别等价于

$$\int_V\rho(x)|\varphi(x)|^2dx,\qquad \int_V\rho(x)\left\{|\varphi(x)|^2+\sum_i|v_i(x)\cdot\varphi(x)|^2\right\}dx。$$

更一般地, 注意, 交换子

$$[v_i,v_j]\varphi=v_i(v_j\varphi)-v_j(v_i\varphi)$$

是阶为 1 的算子, 其中阶为 s 的算子至多包括 s 次微分, 一般记为 $A^s\varphi$。表达式

$$v^\alpha\varphi=v_1^{\alpha_1}(v_1^{\alpha_2}\cdots(v_n^{\alpha_n}\varphi)\cdots)$$

不依赖于模阶 $<[\alpha]$ 的算子的顺序。因此 $\varphi\in C_c^\infty(U)$ 的 Sobolev s 范数等价于

$$\sum_{[\alpha]\leqslant s}\int|v^\alpha\varphi(x)|^2dx。$$

现在设 $E \to M$ 是紧致流形 M 上的矢量丛。假设我们在 E 中和在 M 的切丛 $T(M)$ 中有联络 ∇。(用 ∇ 表示联络算子比在第零张第五节用 D 表示更方便。) 如果 $\{e_\alpha\}$ 是 E 的局域标架, $\{v_i\}$ 是 $T(M)$ 的局域标架, 且 $\{\varphi_i\}$ 为它的余标架, 那么, $E \to M$ 的截面 $f = \sum_\alpha f_\alpha e_\alpha$ 的协变微分 $\nabla_i f_\alpha = f_{\alpha,i}$ 定义为

$$\nabla f = \sum_{\alpha,i} f_{\alpha,i} e_\alpha \otimes \varphi_i。$$

我们得到,

$$f_{\alpha,i} = v_i f_\alpha + A^0(f),$$

其中, A^0 是包括联络矩阵的阶为 0 的算子。

把这些讨论应用到 $E \otimes T^*(M)$, 我们可以定义 $f_{\alpha,i,j} = \nabla_j(\nabla_i f_\alpha)$ 等等。交换规则

$$[\nabla_i, \nabla_j] f_\alpha = A^1(f)$$

从上面 $f_{\alpha,i}$ 的表达式得到。

现在设 E 和 $T(M)$ 有度量, 并且 $\{e_\alpha\}, \{v_i\}$ 是正交标架。截面 $f \in C^\infty(M, E)$ 的整体*Sobolev s*范数定义为

$$\|f\|_s^2 = \sum_{k \leqslant s} \|\nabla^k f\|_0^2 dx,$$

其中,

$$\nabla^k f = \underbrace{\nabla(\nabla(\cdots(\nabla f)\cdots))}_{k次}。$$

用 $\mathscr{H}_s(M, E)$ 表示在这个范数中 $C^\infty(M, E)$ 的完备化。因为, 由我们在本节开头的评论, 由单位分解, 整体 Sobolev 范数诱导了一个范数, 这个范数等价于一点邻域中有紧致支集的截面上的通常 Sobolev 范数, 我们可以得到

整体 Sobolev 引理: $\mathscr{H}_{[n/2]+1+s}(M, E) \subset C^s(M, E)$, *它是 M 上可微类的截面, 并且*

$$\bigcap_s \mathscr{H}_s(M, E) = C^\infty(M, E)。$$

整体 Rellich 引理: *对 $s > r$, 包含映射*

$$\mathscr{H}_s(M, E) \to \mathscr{H}_r(M, E)$$

是一个紧致算子。

现在, 设 M 是紧致厄米流形, 在切丛上有厄米联络。用 $\mathscr{H}_s^{p,q}(M)$ 表示 Sobolev s范数 $\| \ \| = \| \ \|_0$ 中 $A^{p,q}(M)$ 的完备化, 并且把 *Dirichlet* 内积和 *Dirichlet* 范数分别定义为

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(\varphi, \psi) &= (\varphi, \psi) + (\bar\partial\varphi, \bar\partial\psi) + (\bar\partial^*\varphi, \bar\partial^*\psi) \\ &= (\varphi, (I + \Delta)\psi) \\ \mathscr{D}(\varphi) &= \mathscr{D}(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 + \|\bar\partial\varphi\|^2 + \|\bar\partial^*\varphi\|^2。\end{aligned}$$

理论中的基本估计来自

Garding 的不等式: 对 $\varphi \in A^{p,q}(M)$,

$$\|\varphi\|_1^2 \leqslant C\mathscr{D}(\varphi) \quad (C > 0)。$$

我们注意到, 不只是 Laplace 算子 Δ, 而是算子 $I + \Delta$ 被采用, 这是因为 $\Delta \geqslant 0$ 意味着 $I + \Delta$ 没有核, 并且因此我们可以求它的逆。

Garding 不等式的一个用处是证明

正则性引理I: 假设 $\varphi \in \mathscr{H}_s^{p,q}(M)$, 并且 对所有 $\eta \in A^{p,q}(M)$, 在

$$(\psi, \Delta\eta) = (\varphi, \eta)$$

的意义上, $\psi \in \mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 是方程

$$\Delta\psi = \varphi$$

的弱解。那么 $\psi \in \mathscr{H}_{s+2}^{p,q}(M)$。

例如, 假设 $\varphi \in \mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 是 Laplace 算子的本征函数, 意思就是, 对常数 λ, 方程

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi$$

在弱的意义上成立。那么, 由正则性引理, 对所有 s 有 $\varphi \in \mathscr{H}_s^{p,q}(M)$, 并且由整体 Sobolev 引理, 我们得到, 任意 Δ 的本征函数是光滑的。

我们注意到, 任意本征值 $\lambda \geqslant 0$, 并且 $\lambda = 0 \Leftrightarrow \varphi$ 在弱的意义上是调和的。由正则性和 Sobolev 引理, 任意这样的弱调和形式在通常的意义上是 C^∞ 和调和的。

我们将假定 Garding 不等式和正则性引理成立, 继续来完成 Hodge 定理的证明。在这些做完后, 我们回头来证明 Garding 不等式。当我们讨论一般分布的光滑性时再证明正则性引理。希望得到完整讨论的读者可以在第三章第一节中的“光滑性和正则性”子节的结尾找到证明。

基本的 Hilbert 空间的工具是紧致自伴算子的谱定理, 以及通过与一个固定矢量取内积而表示有界线性函数的原理, 形式如下:

引理: 给定 $\varphi \in \mathscr{H}_0^{p,q}(M)$, 存在一个唯一的 $\psi \in \mathscr{H}_1^{p,q}(M)$, 使得对所有的 $\eta \in A^{p,q}(M)$, 有

$$(\varphi, \eta) = \mathscr{D}(\psi, \eta) = (\psi, (I + \Delta)\eta)。$$

从 $\mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 到 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 的映射

$$\psi = T(\varphi)$$

是有界的, 并且从而映射

$$T : \mathscr{H}_0^{p,q}(M) \to \mathscr{H}_1^{p,q}(M)$$

是紧致和自伴的。

证明: 从 Garding 不等式得到, Dirichlet 范数等价于 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 上的 Sobolev 1范数。利用

$$|(\varphi,\eta)| \leqslant \|\varphi\|_0\|\eta\|_0 \leqslant \|\varphi\|_0\mathscr{D}(\eta),$$

线性泛函

$$\eta \to (\varphi,\eta) \qquad (\eta \in A^{p,q}(M))$$

扩张到有 Dirichlet 范数的 $\mathscr{H}_1^{p,q}$ 上的有界线性形式。因此, 方程

$$(\varphi,\eta) = \mathscr{D}(\psi,\eta)$$

有唯一解 $\psi = T(\varphi)$, 其特征为

$$(\varphi,\eta) = (T\varphi,(I+\Delta)\eta) \qquad (\eta \in A^{p,q}(M))。$$

因为 I 和 Δ 是自伴的, 所以 T 是自伴的。从

$$2\alpha\beta \leqslant \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2$$

和

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\|_1^2 &\leqslant C\mathscr{D}(T\varphi,T\varphi)\\
&= C(\varphi,T\varphi)\\
&\leqslant C\|\varphi\|_0\|T\varphi\|_0\\
&\leqslant 2\varepsilon C\|T\varphi\|_0^2 + \frac{2C}{\varepsilon}\|\varphi\|_0^2,
\end{aligned}$$

我们推导出

$$\|T\varphi\|_1^2 \leqslant C'\|\varphi\|_0^2。$$

这就是说, 作为从 $\mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 到 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 的一个映射, T 是有界的, 并且由整体 Rillich 引理, 作为 $\mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 上的算子它是紧致的。 证毕

按照紧致自伴算子的谱定理, 有一个 Hilbert 空间分解

$$\mathscr{H}_0^{p,q}(M) = \bigoplus_m E(\rho_m),$$

其中 ρ_m 是 T 的本征值并且 $E(\rho_m)$ 是有限维本征空间。因为 T 是一对一的, 所以所有的 $\rho_m \neq 0$; 还有, 方程

$$T\varphi = \rho_m\varphi$$

与

$$(\varphi,\eta) = (\rho_m\varphi,(I+\Delta)\eta) \quad (\eta \in A^{p,q}(M)),$$

是一样的, 它意味着在弱的意义上,

$$\Delta\varphi = \left(\frac{1-\rho_m}{\rho_m}\right)\varphi。$$

因此, T 和 Δ 的本征空间是一样的, 并且是由 C^∞ 形式组成的有限维矢量空间。Δ 的本征值 λ_m 和 T 的本征值 ρ_m 有下列关系:

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \frac{1-\rho_m}{\rho_m}\\ \rho_m &= \frac{1}{1+\lambda_m}。\end{aligned}$$

我们可以假设

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots,$$

其中当 $m \to \infty$ 时, $\lambda_m \uparrow \infty, \rho_m \downarrow \infty$。调和空间 $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ 对应于 $\lambda_0 = 0$。对 $\varphi \in \mathscr{H}^{p,q}(M)^\perp$,

$$\|\Delta\varphi\|_0 \geqslant \lambda_1\|\varphi\|_0 \quad (\lambda_1 > 0),$$

并且如果我们把 *Green* 算子定义为

$$\begin{cases} G = 0 & \text{在}\mathscr{H}^{p,q}(M)\text{上}\\ G\varphi = \dfrac{1}{\lambda_m}\varphi, & \varphi \in E\left(\dfrac{1}{1+\lambda_m}\right),\end{cases}$$

那么, G 是紧致自伴算子, 并且有谱分解

$$\mathscr{H}_0^{p,q}(M) = \mathscr{H}^{p,q}(M) \oplus \left(\bigoplus_m E(\rho_m)\right),$$

其中,

$$G\varphi = \left(\frac{\rho_m}{1-\rho_m}\right)\varphi, \quad \varphi \in E(\rho_m)。$$

至此, 我们已经证明了 Hodge 定理。基本点是, 通过 Hilbert 空间技巧得到 Green 算子, 再利用基本估计来证明它是紧致光滑算子。实际上, G 是形式

$$(G\varphi)(x) = \int_M G(x,y)\varphi(y)$$

的积分算子, 其中 $G(x,y)$ 是 $M \times M$ 上的好核, 沿着对角 Δ 有一定的奇异。Hilbert 空间方法的缺点是没有在这种形式中给出 Green 算子。如果我们使用分布而不只是 L^2 范数, 那么, 我们可以通过解

$$\Delta_x G(x,y) = \delta_y + S_y$$

这种类型的分布方程来得到 $G(x,y)$, 其中, δ_y 是在 y 处的 δ 函数, S_y 是阶为 $-\infty$ 的算子。这样的方程将在第三章第一节讨论。

Garding 不等式的证明: 我们假设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是厄米度量的局域幺正余标架, 使得

$$ds^2=\sum_i \varphi_i\bar{\varphi}_i。$$

(p,q) 型形式在局域上写作

$$\psi=\frac{1}{p!q!}\sum_{I,J}\psi_{I,\bar{J}}\varphi_I\wedge\bar{\varphi}_J,$$

其中, $\psi_{I,\bar{J}}$ 对指标 i_α 和 $\bar{j}_\beta$ 是反对称的。有一个 Laplace 算子的著名公式——*Weitzenböck* 恒等式, 我们将在原形式

$$(W)\qquad (\Delta\psi)_{I\bar{J}}=\left(-\sum_{k=1}^{n}\nabla_k\nabla_{\bar{k}}\psi_{I,\bar{J}}\right)+A^1(\psi)$$

上使用它。换句话说, 模低阶项后, 形式上的 Laplace 算子看起来象矢量值函数上的欧氏 Laplace 算子 $-\sum_k\partial^2/(\partial z_k\partial\bar{z}_k)$。

精确的 Weitzenböck 公式与低阶项有关。对于一个一般的厄米度量, $A^1(\psi)$ 是在它的第一阶项中包含挠率的麻烦的算子。然而, 当度量是 Kähler 度量时, 它们消失了, 并且 $A^1(\psi)$ 是一个代数算子

$$A^1(\psi)_{I\bar{J}}=\sum_{k,j_\alpha}R_{j_\alpha\bar{k}}\psi_{I\bar{j}_1\cdots\bar{k}\cdots\bar{j}_q}\quad (k\text{在第}\alpha\text{点处}),$$

其中,

$$R_{j\bar{k}}=\sum_i R^i_{ij\bar{k}}$$

是*Ricci* 曲率。

为了证明 Weitzenböck 公式, 我们设 $v_1,\cdots,v_n$ 为对偶于 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的矢量场标架, 并且 $v_i=\bar{v}_i$。对函数 f,

$$\bar{\partial}f=\sum_i(v_{\bar{i}}\cdot f)\bar{\varphi}_i,$$

并且对张量 $\tau=\{\tau_I\}$, $\bar{z}$ 协变微分 $\bar{\nabla}\tau$ 的分量为

$$(\bar{\nabla}\tau)_I=\bar{\partial}\tau_I+A^0(\tau)。$$

利用符号 $\equiv$ 来表示“模低阶项”是方便的, 比如使得

$$(\bar{\nabla}\tau)_I\equiv\bar{\partial}\tau_I。$$

我们设 $\Phi'=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$。

当 $\psi=f\varphi_I\wedge\bar{\varphi}_J$(没有求和)时, 足以证明 (W)。因为这样来讲, dz 就象矢量从指标, 所以我们将假设 $p=0$。最后, 由公式中的对称性, 我们可以取 $J=(1,\cdots,q)$, 使得

$$\psi=f\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q。$$

现在我们计算:

$$\begin{aligned}
\bar\partial\psi &\equiv (-1)^q\sum_{k>q} f_{\bar k}\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q\wedge\bar\varphi_k \\
*\bar\partial\psi &\equiv (-1)^q 2^{q+1-n}\sum_{k>q}(-1)^{k-q-1}\bar f_{\bar k}\bar\varphi_{q+1}\wedge\cdots\wedge\hat{\bar\varphi}_k\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\Phi' \\
\bar\partial*\bar\partial\psi &\equiv \left(2^{q+1-n}\sum_{k>q}\bar f_{\bar k,k}\right)\bar\varphi_{q+1}\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\Phi' \\
&\quad +\sum_{\substack{k>q\\ l\leqslant q}}2^{q+1-n}(-1)^{k-1}\bar f_{\bar k,l}\bar\varphi_l\wedge\bar\varphi_{q+1}\wedge\cdots\wedge\hat{\bar\varphi}_k\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\Phi' \\
\bar\partial\bar\partial\psi &\equiv \left(2\sum_{k>q}f_{\bar k,k}\right)\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q \\
&\quad +2\sum_{\substack{k>q\\ l\leqslant q}}(-1)^{l-1+q}f_{\bar k,l}\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\bar\varphi}_l\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q\wedge\bar\varphi_k。
\end{aligned}$$

这给出了 $*\bar\partial*\bar\partial\psi$, 其它项 $\bar\partial*\bar\partial*\psi$ 类似但更短:

$$\begin{aligned}
*\psi &= 2^{q-n}\bar f\bar\varphi_{q+1}\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\Phi' \\
\bar\partial*\psi &\equiv 2^{q-n}\sum_{l\leqslant q}\bar f_l\bar\varphi_l\wedge\bar\varphi_{q+1}\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\Phi' \\
\bar\partial\psi &\equiv 2\sum_{l\leqslant q}(-1)^{l-1}f_l\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\bar\varphi}_l\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q \\
\bar\partial*\bar\partial*\psi &\equiv \left(2\sum_{l\leqslant q}f_{l,\bar l}\right)\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q \\
&\quad +\left(2\sum_{\substack{l\leqslant q\\ k>q}}(-1)^{q+l}f_{l,\bar k}\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\bar\varphi}_l\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q\wedge\bar\varphi_k\right)。
\end{aligned}$$

现在, $v_i(v_{\bar j}f)-v_{\bar j}(v_if)\equiv A^1(f)$, 使得模一阶项为

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \left(-2\sum_k f_{\bar k,k}\right)\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_q \\
&\quad +\left(2\sum_{\substack{l\leqslant q\\ k>q}}(-1)^{l-1+q}f_{\bar k}\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\cdots\hat{\bar\varphi}_l\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\bar\varphi_k\right. \\
&\quad \left.+2\sum_{\substack{l\leqslant q\\ k>q}}(-1)^{l+q}f_{\bar k,l}\bar\varphi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\bar\varphi}_l\wedge\cdots\wedge\bar\varphi_n\wedge\bar\varphi_k\right)。
\end{aligned}$$

最后两项抵消就给出

$$\Delta\psi \equiv \left(-2\sum_k f_{\bar{k},k}\right)\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q。$$

这证明了 Weitzenböck 公式。

我们现在来证明 Garding 不等式, 其中, 我们保证 Weitzenböck 公式的形式为

$$(\Delta\psi)_{I,\bar{J}} = \left(-2\sum_k \psi_{I\bar{J},\bar{k},k}\right) + A^1(\psi)。$$

类型为

$$(*)\qquad 2\alpha\beta \leqslant \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2$$

的不等式将被重复使用, 并且 $\Phi = C_n\Phi'\wedge\overline{\Phi'}$ 表示体积形式。设

$$\begin{aligned}\eta &= C_n\left(-\sum_{I,J,k}(-1)^{k-1}\psi_{I\bar{J},\bar{k}}\overline{\psi_{I\bar{J}}}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\varphi}_k\wedge\cdots\wedge\varphi_n\right)\wedge\Phi'\\ &= C_n'((\bar{\nabla}\psi,\psi)\wedge\omega^{n-1})。\end{aligned}$$

第二个表达式证明, η 是整体定义的, 并且因为它有 $(n-1,n)$ 型, 所以 $d\eta = \partial\eta$。由 Stokes 定理,

$$\int_M \partial\eta = 0。$$

另一方面,

$$\partial\eta = \left(-2\sum_{I,J,k}\psi_{I\bar{J},\bar{k},k}\bar{\psi}_{IJ}\right)\Phi - \left(2\sum_{I,J,k}\psi_{I\bar{J},\bar{k}}\overline{\psi_{I\bar{J},\bar{k}}}\right)\Phi + (A^1\psi,\psi)\Phi。$$

因此, 由 Weitzenböck 公式,

$$(\Delta\psi,\psi) = \|\bar{\nabla}\psi\|^2 + (A^1\psi,\psi),$$

其中,

$$\|\bar{\nabla}\psi\|^2 = \int_M (\bar{\nabla}\psi,\bar{\nabla}\psi)\Phi$$

是张量 ψ 的 $\bar{z}$ 协变微分的 L^2 范数, 并且 $A^1(\psi)$ 是包括 ψ 的 $\bar{z}$ 微分的第一阶算子。利用 $(*)$, 我们得到

$$2|(A^1\psi,\psi)| \leqslant \varepsilon\|\bar{\nabla}\psi\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\psi\|^2,$$

它意味着

$$\|\bar{\nabla}\psi\|^2 \leqslant C'\{(\Delta\psi,\psi) + \|\psi\|^2\},\quad C' > 0。$$

现在把这次的讨论重复到

$$\gamma = C_n \left(-\sum_{I,J,k} (-1)^{k-1} \psi_{I\bar{J},k} \overline{\psi_{I\bar{J}}} \bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \hat{\bar{\varphi}} \wedge \cdots \bar{\varphi}_n \right) \wedge \Phi',$$

并且, 通过 Dirichlet 范数, 利用 $f_{k,\bar{k}} = f_{\bar{k},k} + A^1(f)$ 从下面来估计 z 微分的 L^2 范数 $\|\nabla\psi\|^2$。放在一起得到

$$\|\nabla\psi\|^2 + \|\bar{\nabla}\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \geqslant C''((\Delta\psi,\psi) + \|\psi\|^2) = C''\mathscr{D}(\psi),$$

这就是 Garding 不等式。

注释: 在 Kähler 情形, 可以利用精确 Weitzenböck 公式和上述分步积分运算来证明*Kodaira* 恒等式

$$(\Delta\psi,\psi) = \|\bar{\nabla}\psi\|^2 + (R\psi,\psi),$$

其中, 对 $\psi \in A^{0,q}(M)$ 和重复指标求和,

$$(R\psi,\psi) = q\int_M \left(R_{ij}\psi_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_{q-1}\bar{i}}\bar{\psi}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_{q-1}\bar{j}}\right)\Phi。$$

如果 ψ 是调和的, 并且厄米形式

$$R_{i\bar{j}}\xi^i\bar{\xi}^j$$

是正定的, 那么我们推导出 $\psi \equiv 0$。由 Hodge 定理,

$$0 = \mathscr{H}^{0,q}(M) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,q}(M), \quad q > 0。$$

这是著名的 kodaira 消没定理的特殊情形, 一般性的讨论将在第一章第三节给出。

Hodge 定理的应用

首先注意到调和空间和 Dolbeault 上同调群之间的同构

$$\mathscr{H}^{p,q}(M) \to H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)。$$

实际上, 因为 $\bar{\partial}G\psi = G\bar{\partial}\psi = 0$, 由 Hodge 分解定理, 每个 $\bar{\partial}$ 闭形式 $\psi \in Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ 是

$$\psi = \mathscr{H}(\psi) + \bar{\partial}(\bar{\partial}^* G\psi))。$$

把这个同构与 Dolbeault 同构结合起来, 我们找到了

$$\mathscr{H}^{p,q}(M) \xrightarrow{\sim} H^q(M,\Omega^p)。$$

由 Hodge 定理的第一个陈述, 它意味着

有限维数性:

$$\dim H^q(M,\Omega^p) < \infty。$$

在 $q=0$ 的情形中给出有限维数性的直接证明是有好处的。设 $\{U_i\}$ 是 M 的有限坐标覆盖, U_i 中的全纯坐标为 $z_{i,1},\cdots,z_{i,n}$。我们可以找到相对紧致的开子集 $V_i\subset U_i$, 它们仍然形成 M 的覆盖。U_i 中的整体截面

$$\begin{aligned}\varphi\in H^0(M,\Omega^q) &= H^0(\{U_i\},\Omega^q)\\ &= H^0(\{V_i\},\Omega^q)\end{aligned}$$

为

$$\varphi=\sum_J \varphi_{iJ}(z)dz_{i,J},$$

其中, $\varphi_{iJ}(z)\in\mathscr{O}(U_i)$。我们定义范数为

$$\|\varphi\|=\sum_{i,J}\sup_{z\in V_i}\|\varphi_{i,J}(z)|。$$

这个范数是有限的, 因为 (1) $H^0(\{V_i\},\Omega^q)\cong H^0(\{U_i\},\Omega^q)$, (2) 满足 $\sup_{z\in V_i}|\psi_\nu(z)-\psi_\mu(z)|\to 0$ 的任意解析函数序列 $\psi_\nu\in\mathscr{O}(U_i)$ 有一个子序列, 一致收敛到全纯函数 $\psi\in\mathscr{O}(V_i)$, 我们推导出, 在这个范数下, $H^0(M,\Omega^q)$ 是完备 Banach 空间。由 Montel 定理, 给定一个 $\|\varphi_\nu\|\leqslant 1$ 的序列 $\varphi_\nu\in H^0(M,\Omega^q)$, 我们可以提取出一个子序列, 它的系数函数 $\varphi_{\nu,i,J}(z)\in\mathscr{O}(U_i)$ 一致收敛到某些 $\varphi_{i,J}(z)\in\mathscr{O}(V_i)$。因此, 在这个 Banach 空间中的单位球是紧致的, 并且由 Banach 空间中的一个结论, 它是有限维的。

实际上, 单位球紧致的 Hilbert 空间明显是有限维的, 并且我们可以通过定义

$$(\varphi,\psi)=\sum_{i,J}\int_{V_i}\varphi_{i,J}(z)\overline{\psi_{i,J}(z)}\Phi(z_i),$$

把 $H^0(M,\Omega^q)$ 变成 Hilbert 空间, 其中, $\Phi(z_i)$ 是坐标 z_i 中的欧氏体积形式。因为 (1). 在 $L^2(V_i)$ 中为 Cauchy 序列的 $\psi_\nu\in\mathscr{O}(U_i)$ 有一个子序列, 在 V_i 的紧致子集上一致收敛到 $\psi\in\mathscr{O}(V_i)$, (2). 在 $L^2(V_i)$ 中有界的序列有一个类似收敛子序列, 所以我们可以采用前面对这个 Hilbert 空间背景的讨论。

这个讨论可以修改一下来证明所有 $H^q(M,\Omega^p)$ 的有限维数性, 甚至任意凝聚解析层 $\mathscr{F}$ 的 $H^q(M,\mathscr{F})$ 的有限维数性——这个问题将在第五章第三节进一步讨论, 在那里将得到, 在紧致流形上的凝聚层上同调的整体理论中, 有限维数性是中心结果。

Hodge 定理的第二个应用是对 Kodaira–Serre 对偶的应用。从公式 $\bar\partial^*=-*\bar\partial*$, 我们得到

$$*\Delta=\Delta*。$$

这意味着 $*$ 算子诱导了一个同构

$$*:\mathscr{H}^{p,q}(M)\to\mathscr{H}^{n-p,n-q}(M)。$$

特别是,

$$\mathscr{H}^{n,n}(M)\cong\mathbb{C}\cdot\Phi,$$

其中, $\Phi = *1$ 是度量的体积形式。

为了得到不依赖于度量选择的内蕴形式的这个同构, 我们将在一般的方式上进行讨论, 给定空间 X 上的层 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 以及层映射

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \to \mathscr{H},$$

有一个诱导杯积

$$H^*(X,\mathscr{F}) \otimes H^*(X,\mathscr{G}) \to H^*(X,\mathscr{H}),$$

它由 de Rham 定理讨论的结尾处的上链公式给出。特别是, 由全纯微分形式的外积诱导的配对

$$\Omega^p \otimes \Omega^q \to \Omega^{p+q}$$

诱导了

$$(*) \qquad H^*(M,\Omega^p) \otimes H^*(M,\Omega^q) \to H^*(M,\Omega^{p+q})。$$

另一方面, 由

$$\{\psi,\eta\} = \psi \wedge \eta$$

给出的配对

$$\{\quad,\quad\} : A^{p,r}(M) \otimes A^{q,s}(M) \to A^{p+q,r+s}(M)$$

满足

$$\bar\partial\{\psi,\eta\} = \{\bar\partial\psi,\eta\}(-1)^{\deg\psi}\{\psi,\bar\partial\eta\},$$

并且诱导了

$$(**) \qquad H_{\bar\partial}^{p,*}(M) \otimes H_{\bar\partial}^{q,*}(M) \to H_{\bar\partial}^{p+q,*}(M)。$$

由于 de Rham 定理结尾处讨论的同样理由, 除了一个正负号外, 配对 $(*)$ 和 $(**)$ 在 Dolbeault 同构下对应。基于这个理解, 我们得到

Kodaira–Serre 对偶定理:

1. $H^n(M,\Omega^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$,
2. 下列配对是非退化的:

$$H^q(M,\Omega^p) \otimes H^{n-q}(M,\Omega^{n-q}) \to H^n(M,\Omega^n)。$$

证明: 1. 中的映射由

$$H^n(M,\Omega^n) \cong H_{\bar\partial}^{n,n}(M)$$

和线性函数

$$H_{\bar\partial}^{n,n}(M) \to \mathbb{C}$$

复合得到, 这个线性函数的定义为

$$\psi \to \int_M \psi,$$

由于 Stokes 定理和 $A^{n,n-1}(M)$ 上 $d = \bar{\partial}$, 它有明确的定义。因为

$$\int_M \Phi = \mathrm{vol}(M) > 0,$$

所以 1. 是一个同构的结论来自

$$H_{\bar{\partial}}^{n,n}(M) \cong \mathscr{H}^{n,n}(M) \cong \mathbb{C} \cdot \Phi。$$

配对 2. 是

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$$

与配对

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \otimes H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}(M) \to \mathbb{C}$$

的复合, 上述配对定义为

$$\psi \otimes \eta \to \int_M \psi \wedge \eta。$$

因为

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \cong \mathscr{H}^{p,q}(M)$$

和对调和形式 $\psi \not\equiv 0$ 有

$$\psi \otimes *\psi \to \int_M \psi \wedge *\psi = \|\psi\|^2 > 0,$$

所以它是非退化的。 证毕

我们现在讨论 Künneth 公式。给定紧致复流形 M 和 N, 我们考虑乘积 $M \times N$。到两个因子上的投影诱导了映射

$$\begin{aligned} H^*(M, \Omega_M^p) &\to H^*(M \times N, \Omega_{M \times N}^p), \\ H^*(N, \Omega_N^p) &\to H^*(M \times N, \Omega_{M \times N}^p)。\end{aligned}$$

不久我们将证明它们是单射, 并且把它们的群和它们的像等价。由此, 杯积给出

$$(*) \qquad H^*(M, \Omega_M^*) \otimes H^*(M, \Omega_N^*) \to H^*(M \times N, \Omega_{M \times N}^*)。$$

Künneth 公式断言, 这是一个同构。

我们将利用调和形式来证明它。 M 和 N 上的厄米度量诱导了 $M \times N$ 上的厄米度量, 并且我们将证明, 在这个度量的选择下,

$$(**) \qquad \mathscr{H}^{u,v}(M \times N) \cong \bigoplus_{\substack{p+r=u \\ q+s=v}} (\mathscr{H}^{p,q}(M) \otimes \mathscr{H}^{r,s}(N))。$$

这将建立起 Künneth 公式。

为此, 我们用 z, w 表示 M 和 N 上一般局域坐标。分别给出 M, N 上的形式 ψ, η 后, 我们将用 $\psi \otimes \eta$ 表示在 $M \times N$ 上的诱导形式, 它的定义为

$$(\psi \otimes \eta)(z, w) = \psi(z) \wedge \eta(w)。$$

这些形式称为可分解的。

引理: *在 $M \times N$ 的所有形式中, 可分解形式是 L^2 稠密的。*

证明: 我们将在函数的情况下证明, 对一般形式的证明所需要的修改是显然的。

必须证明的是, 对所有 ψ 和 η, 满足

$$\int_{M \times N} \varphi(z, w)(\overline{\psi(z)\eta(w)}) = 0$$

的函数 $\varphi(z, w)$ 是 0。假设 $\mathrm{Re}\varphi(z_0, w_0) > 0$, 分别选择 $\psi(z), \eta(w)$ 在 z_0, w_0 附近有紧致支集, 并且满足

$$\mathrm{Re}(\varphi(\psi\eta)) \geqslant 0, \qquad \mathrm{Re}(\psi(z_0, w_0)\overline{\psi(z_0)\eta(w_0)}) > 0。$$

利用非负实脉冲函数容易完成证明。那么上述积分是非零的。 证毕

在 $M \times N$ 上的形式在局域上写作

$$\varphi(z, w) = \sum \varphi_{II'JJ'} dz_I \wedge dw_{I'} \wedge d\bar{z}_J \wedge d\bar{w}_{J'},$$

并且因此

$$\bar{\partial}_{M \times N} = \bar{\partial}_M \pm \bar{\partial}_N,$$

其中, $\bar{\partial}_M$ 是关于 $\bar{z}_j$ 的外微分, $\bar{\partial}_N$ 类似。因为度量是乘积, 所以我们可以选择形式的 $M \times N$ 的一个正交余标架

$$\{\varphi_1(z), \cdots, \varphi_m(z); \psi_1(w), \cdots, \psi_n(w)\},$$

其中, $\varphi_i(z)$ 是 M 的正交余标架, $\psi_\alpha(w)$ 是 N 的正交余标架。利用公式

$$\bar{\partial}^* = - * \bar{\partial} *,$$

我们得到

$$\begin{cases} \bar{\partial}^*_{M \times N} & = & \bar{\partial}^*_M \pm \bar{\partial}^*_N, \\ \bar{\partial}_M \bar{\partial}^*_N + \bar{\partial}^*_N \bar{\partial}_M & = 0 = & \bar{\partial}^*_M \bar{\partial}_N + \bar{\partial}_N \bar{\partial}^*_M。 \end{cases}$$

这个关系意味着,

$$\Delta_{M \times N} = \Delta_M + \Delta_N。$$

更确切地说, 在可分解形式上,

$$\Delta_{M \times N}(\psi \otimes \eta) = (\Delta_M \psi) \otimes \eta + \psi \otimes (\Delta_N \eta),$$

并且由引理, 它在所有形式是确定了 $\Delta_{M\times N}$。

现在, 我们回到主要问题。如果 $\psi_1,\psi_2,\cdots$ 是 Δ_M 的本征形式的完备集合, $\eta_1,\eta_2,\cdots$ 是 Δ_N 的本征形式的完备集合, 那么, 形式

$$\psi_i\otimes\eta_\alpha$$

是 $\Delta_{M\times N}$ 的本征形式。由引理, 它们形成一个完备集合。如果

$$\begin{aligned}\Delta_M\psi_i &= \lambda_i\psi_i, \qquad \lambda_i\geqslant 0,\\ \Delta_N\eta_\alpha &= \mu_\alpha\eta_\alpha, \qquad \mu_\alpha\geqslant 0,\end{aligned}$$

那么,

$$\Delta_{M\times N}(\psi_i\otimes\eta_\alpha)=(\lambda_i+\mu_\alpha)(\psi_i\otimes\eta_\alpha)。$$

因为 $\lambda_i+\mu_\alpha=0\Leftrightarrow\lambda_i=\mu_\alpha=0$, 所以得到关于调和形式的断言 (**)。 Künneth 公式证毕

如果我们定义*Hodge* 数为

$$h^{p,q}(M)=\dim H^q(M,\Omega^p),$$

那么我们已经证明了:

$$\begin{aligned}h^{p,q}(M) &< \infty,\\ \begin{cases}h^{n,n}(M) &= 1,\\ h^{p,q}(M) &= h^{n-p,n-q}(M),\end{cases}\\ h^{u,v}(M\times N) &= \sum_{\substack{p+r=u\\ q+s=v}} h^{p,q}(M)h^{r,s}(N)。\end{aligned}$$

如果 M 是 Kähler 流形, 在 Hodge 数中间有更深层的附加关系, 比如

$$\begin{aligned}h^{p,q}(M) &= h^{q,p}(M),\\ b_r(M) &= \sum_{p+q=r} h^{p,q}(M),\\ h^{p,p}(M) &\geqslant 1,\end{aligned}$$

其中, $b_r(M)=\dim H^r(M,\mathbb{C})$ 是第 r 个 Betti 数。它们以及更多的关系在下节讨论。

最后的评论。一般地, 调和形式的外积不是调和的。类似地, 调和形式到子流形上的限制对诱导度量一般不是调和的。否则, 上同调环应只有附加在外代数上的那些关系。还有, 厄米流形上的两个 Laplace 算子

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar\partial} &= \bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial,\\ \Delta_d &= dd^*+d^*d,\end{aligned}$$

一般没有关系。有一个不可思议的结果: 如果度量是 Kähler 的, 这些一般原理都不成立, 并且调和形式的理论有一些特别的对称性。关于它的更多讨论见下节。

7. Kähler 流形

Kähler 条件

设 M 是一个紧致复流形, 其厄米度量为 ds^2, 并且假设在某些开集 $U \subset M$ 中, ds^2 是欧氏的; 即, 存在局域全纯坐标 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 使得

$$ds^2 = \sum dz_i \otimes d\bar{z}_i。$$

写出 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$; 可以直接验证, 对在 U 上有紧致支集的微分形式

$$\varphi = \sum_{I\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

有

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{\partial}}(\varphi) &= -2\sum_{I,J,i} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}\varphi_{I\bar{J}} \cdot dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{I,J,i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)\varphi_{I\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ &= \frac{1}{2} \cdot \Delta_d(\varphi),\end{aligned}$$

即, 除了一个常数外, $\bar{\partial}$-Laplace 算子等于 U 中普通的 d-Laplace 算子(参见上面第六节)。当然, 很少紧致复流形有处处的欧氏度量, 但是, 就象所出现的那样, 为了保证在复流形上的等式

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta_d,$$

在每个点, 度量是欧氏度量二阶逼近就可以了。这就是*Kähler* 条件, 在本节, 我们将花更多的时间了讨论这个条件及其后果。

首先, 我们给出 Kähler 条件的其它三种形式。再次设

$$ds^2 = \sum h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j = \sum \varphi \otimes \bar{\varphi}_i$$

是复流形 M 上的厄米度量。如果 ds^2 的伴随 $(1,1)$ 形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \varphi_i \wedge \bar{\varphi}_i$$

是 d 闭的, 我们称其为 *Kähler* 的。在上面第五节, 我们证明了, 有一个唯一的 1 形式矩阵 ψ, 满足

$$\psi_{ij} + \bar{\psi}_{ji} = 0, \qquad d\varphi_i = \sum \psi_{ij} \wedge \varphi_j + \tau_i,$$

其中, τ_i 是 $(2,0)$ 型的; 在那里, 如果挠率 $\tau=0$, 我们称度量是 Kähler 的。我们现在证明这些条件是等价的。写出

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{-1}}d\omega &= \sum d\varphi_i\wedge\bar\varphi_i-\sum\varphi_i\wedge d\bar\varphi_i\\ &= \sum\psi_{ij}\wedge\varphi_j\wedge\bar\varphi_i-\sum\varphi_i\wedge\bar\psi_{ij}\wedge\bar\varphi_j+\sum\tau_i\wedge\bar\varphi_i-\sum\varphi_i\wedge\bar\tau_i。\end{aligned}$$

我们得到,

$$\sum\psi_{ij}\wedge\varphi_j\wedge\bar\varphi_i-\sum\varphi_i\wedge\bar\psi_{ij}\wedge\bar\varphi_j=\sum\psi_{ij}\wedge\varphi_j\wedge\bar\varphi_i+\sum\varphi_i\wedge\psi_{ji}\wedge\bar\varphi_j=0,$$

并且因此 $(2/\sqrt{-1})d\omega=\sum\tau_i\wedge\bar\varphi_i-\sum\varphi_i\wedge\bar\tau_i$。但是 τ_i 是 $(2,0)$ 型的, 并且 $\bar\varphi_i$ 是逐点线性独立的 $(0,1)$ 形式, 它意味着 $d\omega=0$ 当且仅当 $\tau=0$。

Kähler 条件的另一个解释——它给出一些几何感觉——是: 如果对每个点 $z_0\in M$, 我们可以找到 z_0 邻域中的一个全纯坐标系 (z), 使得

$$ds^2=\sum(\delta_{ij}+g_{ij})dz_i\otimes d\bar z_j,$$

其中, 在 z_0 处, g_{ij} 直到 k 阶都等于零, 那么我们称 M 上的度量 ds^2 到 k 阶密切于 $\mathbb{C}^n$ 上的欧氏度量; 我们通常写作,

$$ds^2=\sum(\delta_{ij}+[k])dz_i\otimes d\bar z_j。$$

引理: *ds^2 是 Kähler 的当且仅当它处处到 2 阶密切于欧氏度量。*

证明: 在一个方向上是显然的: 如果在 z_0 周围的某些坐标系中,

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum(\delta_{ij}+[2])dz_i\wedge d\bar z_j,$$

那么, $d\omega(z_0)=0$。

反过来, 我们总可以找到坐标系 (z), 满足 $h_{ij}(z_0)=\delta_{ij}$; 即,

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j,k}(\delta_{ij}+a_{ijk}z_k+a_{ij\bar k}\bar z_k+[2])dz_i\wedge d\bar z_j;$$

注意,

$$h_{ij}=\overline{h_{ji}}\Rightarrow a_{ij\bar k}=\overline{a_{ijk}}$$

和

$$d\omega=0\Rightarrow a_{ijk}=a_{kji}。$$

我们希望找到一个坐标变化

$$z_k=w_k+\frac{1}{2}\sum b_{klm}w_lw_m,$$

使得

$$(*)\qquad \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum(\delta_{ij}+[2])dw_i\wedge\bar{w}_j;$$

通过规定

$$b_{klm}=b_{kml}$$

来归一化。于是,

$$dz_k = dw_k + \sum b_{klm}w_l dw_m,$$

使得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{-1}}\omega &= \sum(dw_i+\sum b_{ilm}w_l dw_m)\wedge\sum(d\bar{w}_i+\sum\overline{b_{ipq}}\bar{w}_p d\bar{w}_q)\\ &\quad+\sum(a_{ijk}w_k+a_{ij\bar{k}}\bar{w}_k)dw_i\wedge d\bar{w}_j+[2]\\ &= \sum(\delta_{ij}+\sum_k(a_{ijk}w_k+a_{ij\bar{k}}\bar{w}_k+b_{jki}w_k+\overline{b_{ikj}}\bar{w}_k))dw_i\wedge\delta\bar{w}_j+[2]。\end{aligned}$$

如果我们设

$$b_{jki}=-a_{ijk};$$

那么,

$$b_{jki}=-a_{ijk}=-a_{kji}=b_{jik}$$

和

$$\overline{b_{ikj}}=-\overline{a_{jik}}=-a_{ij\bar{k}},$$

使得坐标改变实际上满足了条件 $(*)$。 证毕

在计算中使用的表达这个条件的另一种方法是说, 对每个点 $z_0\in M$, 在 z_0 的邻域中我们可以找到度量的幺正余标架 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$, 使得 $d\varphi_i(z_0)=0$。

如果流形有 Kähler 度量, 那么称之为 *Kähler* 流形; 我们现在给出一些 Kähler 流形的例子。

例子:

紧致 Riemann 曲面上的任意度量是 Kähler 的, 这是因为 $d\omega$ 的 3 形式, 因此等于零。

如果 Λ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的格子, 那么复环面 $T=\mathbb{C}^n/\Lambda$ 是 Kähler 的, 其欧氏度量为 $ds^2=\sum dz_i\otimes d\bar{z}_i$。

如果 M 和 N 是 Kähler 的, 那么 $M\times N$ 也是 Kähler 的, 其度量为乘积度量。

如果 $S\subset M$ 是子流形, ω 是 M 上 Kähler 度量的伴随 $(1,1)$ 形式, 那么, 我们在上面的第二节已经注意到, S 上诱导度量的伴随 $(1,1)$ 形式就是 ω 到 S 的拖回; 因此, 如果 M 是 Kähler 的, 那么 S 是 Kähler 的。

回想一下, $\mathbb{P}^n$ 上的 Fubini–Study 度量由其伴随 $(1,1)$ 形式

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|Z\|^2$$

给出, 其中 Z 是 $U \subset \mathbb{P}^n$ 到 $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 的局域提升。因为 $\partial\bar{\partial}=-\bar{\partial}\partial$, 所以

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\partial+\bar{\partial})(\bar{\partial}-\partial)\log\|Z\|^2\\ &= \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}d((\bar{\partial}-\partial)\log\|Z\|^2),\end{aligned}$$

因此我们得到, ω 是闭的, 并且 Fubini–Study 度量是 Kähler 的。

(注意: 用

$$d^c=\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar{\partial}-\partial)$$

来定义一个算子 d^c 是便利的。 d 和 d^c 都是实微分算子, 并且

$$dd^c=-d^cd=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}。$$

因此我们可以写出

$$\omega=dd^c\log\|Z\|^2。)$$

注意, 由上面得到, 任意可以嵌入射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的紧致复流形是 *Kähler* 的。

我们给出 Kähler 条件的一些直接拓扑后果: 对紧致 Kähler 流形 M,

1. 偶 *Betti* 数 $b_{2q}(M)$ 是正定的;

2. 全纯 q 形式 $H^0(M,\Omega^q)$ 单射到上同调 $H^q_{\mathrm{DR}}(M)$ 中, 即, 每个这样的 η 是闭的, 并且都不是恰当的;

3. 任意解析子簇的基本类 η_V 是非零的。

证明: 2. 设 η 是全纯 $(q,0)$ 形式; 我们希望证明 $d\eta=0$, 并且只有 $\eta\equiv 0$ 时, $\eta=d\psi$。设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是局域幺正余标架; 如果

$$\eta=\sum_I\eta_I\varphi_I,$$

那么,

$$\eta\wedge\bar{\eta}=\sum_{I,J}\eta_I\bar{\eta}_J\varphi_I\wedge\bar{\varphi}_J。$$

现在,

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\varphi_i\wedge\bar{\varphi}_i,$$

所以,

$$\omega^{n-q}=C_q(n-q)!\sum_{\#K=n-q}\varphi_K\wedge\bar{\varphi}_K;$$

因此, 对适当的 $c_q\neq 0$,

$$\eta\wedge\bar{\eta}\wedge\omega^{n-q}=C_q\sum_I|\eta_I|^2\cdot\Phi,$$

其中, Φ 是体积形式。因此,

$$\int_M \eta \wedge \bar{\eta} \wedge \omega^{n-q} \neq 0 \quad 如果\eta \neq 0。$$

现在, 假定 $\eta = d\psi$。那么, $d\eta = d\bar{\eta} = 0$, 并且因为 $d\omega = 0$, 所以我们得到

$$\int_M \eta \wedge \bar{\eta} \wedge \omega^{n-q} = \int_M d(\psi \wedge \bar{\eta} \wedge \omega^{n-q}) = 0$$

因此, $\eta = d\psi$ 意味着 $\eta = 0$。最后, 因为 $d\eta = \partial\eta$ 是全纯 $(q+1)$ 形式且是恰当的, 所以 $d\eta = 0$。

1. 为了证明 $b_{2q}(M) > 0$, 我们把 ω^q 表示为不是恰当形式的闭 $2q$ 形式: 如果 $\omega^q = d\psi$, 那么, 我们得到

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\psi \wedge \omega^{n-q}) = 0。$$

但是 $\omega^n/n!$ 是 M 上的体积形式, 且因此它不能出现。

3. 3 的证明是显然的: 对复维数为 d 的 V, 由上面第二节的 Wirtinger 定理得到

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{1}{d!}\int_V \omega^d \neq 0;$$

所以在 $H_{2d}(M)$ 中 $(\eta_V) \neq 0$。 证毕

注意, 1 和 3 是第57(64)页射影空间子流形的命题的推广。

Hodge 恒等式和 Hodge 分解

设 M 是紧致复流形, 厄米度量为 ds^2, 伴随 $(1,1)$ 形式为 ω。我们已经在 M 上的微分形式的空间 $A^*(M)$ 上定义了许多算子, 比如, $\partial, \bar{\partial}, d, d^c$, 它们各自的相伴和伴随 Laplace 算子, 以及按照型和次数的分解

$$\Pi^{p,q} : A^*(M) \to A^{p,q}(M)$$
$$\Pi^r = \bigoplus_{p+q=r} \Pi^{p,q} : A^*(M) \to A^r(M)。$$

通过

$$L(\eta) = \eta \wedge \omega$$

我们定义另外一个算子

$$L : A^{p,q} \to A^{p+1,q+1}(M),$$

并且设

$$\Lambda = L^* : A^{p,q}(M) \to A^{p-1,q-1}(M)$$

是它的伴随算子。现在, 对一般的 M, 在这些各种各样的算子之间没有明显的关系。然而, 如果我们假设 M 上的度量是 Kähler 的, 那么我们得到许多把它们关联起来的恒等式, 称

为*Hodge* 恒等式。的确, Kähler 条件正好保证了伴随于 Riemann 度量的实势理论与它下面的复结构之间的很强的相互影响。基本恒等式——所有其它的恒等式都可以简单地从它得到——是

$$(*) \qquad [\Lambda, d] = -4\pi d^{c^*},$$

其中, $[A, B]$ 表示交换子 $AB - BA$; 或者等价地,

$$[L, d^*] = 4\pi d^c。$$

证明: 通过分解到型, 这个恒等式等价于

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^* \quad 和 \quad [\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*。$$

因为 Λ, d 和 d^c 是实算子, 所以任意两个都可得到另外一个; 我们将证明 $[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*$。我们首先在有欧氏度量的 $\mathbb{C}^n$ 上进行计算。这里有点混乱但却是直接的, 并且我们把它分裂为分量后变得简便了。为此, 我们在 $\mathbb{C}^n$ 中的形式上引入一些新的算子: 对每个 $k = 1, \cdots, n$, 设 $e_k : A_c^{p,q}(\mathbb{C}^n) \to A_c^{p+1,q}(\mathbb{C}^n)$ 为紧致支集形式上的算子, 定义为

$$e_k(\varphi) = dz_k \wedge \varphi;$$

类似设 $\bar{e}_k : A_c^{p,q}(\mathbb{C}^n) \to A_c^{p,q+1}(\mathbb{C}^n)$ 定义为

$$\bar{e}_k(\varphi) = d\bar{z}_k \wedge \varphi。$$

设 i_k 和 $\bar{i}_k$ 分别是 e_k 和 $\bar{e}_k$ 的伴随算子。注意, $e_k, \bar{e}_k, i_k$ 和 $\bar{i}_k$ 在 $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ 上都是线性的。现在,

$$i_k(dz_J \wedge d\bar{z}_K) = 0, \qquad 如果 k \notin J,$$

并且, 回想长度为 $\|dz_k\| = 2$, 使得

$$i_k(dz_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K) = 2dz_J \wedge d\bar{z}_K;$$

因为在前一种情况下, 对任意多重指标 L 和 M, 有

$$\begin{aligned}(i_k(dz_J \wedge d\bar{z}_K), dz_L \wedge d\bar{z}_M) &= (dz_J \wedge d\bar{z}_k, dz_k \wedge dz_L \wedge d\bar{z}_M) \\ &= 0,\end{aligned}$$

所以 $i_k(dz_J \wedge d\bar{z}_k) = 0$, 而在后一种情况下,

$$\begin{aligned}(i_k(dz_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K), dz_L \wedge d\bar{z}_M) &= (dz_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K, dz_k \wedge dz_L \wedge d\bar{z}_M) \\ &= 2(dz_J \wedge d\bar{z}_K, dz_L \wedge d\bar{z}_M)\end{aligned}$$

类似地, 我们得到,

$$\bar{i}_k(dz_J \wedge d\bar{z}_K) = 0, \qquad 如果k \notin K,$$

和

$$\bar{i}_k(d\bar{z}_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K) = 2dz_J \wedge d\bar{z}_K。$$

还要注意, 对任意单项式 $dz_J \wedge d\bar{z}_K$, 有

$$i_k \cdot e_k(dz_J \wedge d\bar{z}_K) = \begin{cases} 0 & 如果k \in J, \\ 2dz_J \wedge d\bar{z}_K, & 如果k \notin J, \end{cases}$$

同时有

$$e_k \cdot i_k(dz_J \wedge d\bar{z}_K) = \begin{cases} 2dz_J \wedge d\bar{z}_K, & 如果k \in J, \\ 0, & 如果k \notin J。 \end{cases}$$

因此,

$$i_k e_k + e_k i_k = 2,$$

并且同样得到 $\bar{i}_k \bar{e}_k + \bar{e}_k \bar{i}_k = 2$。另一方面, 对 $k \neq l$, 我们得到,

$$\begin{aligned} i_k \cdot e_l(dz_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K) &= i_k(dz_l \wedge dz_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K) \\ &= i_k(-dz_k \wedge dz_l \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K) \\ &= -2(dz_l \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K) \\ &= -2e_l(dz_J \wedge d\bar{z}_K) \\ &= -e_l \cdot i_k(dz_k \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K), \end{aligned}$$

并且在 $k \notin J$ 情况下得到,

$$i_k \cdot e_l(dz_J \wedge d\bar{z}_K) = e_l \cdot i_k(dz_J \wedge d\bar{z}_K) = 0,$$

所以我们得到

$$e_k i_l + i_l e_k = 0。$$

我们还把 $A_c^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 中的算子 ∂_k 和 $\bar{\partial}_k$ 定义为

$$\partial_k \left(\sum \varphi_{I\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) = \sum \frac{\partial \varphi_{I\bar{J}}}{\partial z_k} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

和

$$\bar{\partial}_k \left(\sum \varphi_{I\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) = \sum \frac{\partial \varphi_{I\bar{J}}}{\partial \bar{z}_k} dz_I \wedge d\bar{z}_J。$$

注意, ∂_k 和 $\bar{\partial}_k$ 可互换, 并且与 $e_l, \bar{e}_l, i_l$ 和 $\bar{i}_l$ 也可交换。最后我们得到, ∂_k 的伴随算子是 $-\bar{\partial}_k$: 对任意紧致支集形式 $\varphi = \sum \varphi_{I,\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_K$和任意多重指标 L 和 M, 以及任意 C^∞ 函

数 ψ, 我们得到,

$$\begin{aligned}
(-\bar{\partial}_k\varphi, \psi dz_L \wedge d\bar{z}_M) &= \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\varphi_{L\bar{M}})dz_L \wedge d\bar{z}_M, \psi dz_L \wedge d\bar{z}_M\right) \\
&= 2^{\#L+\#M}\int_{\mathbb{C}^n} -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\varphi_{L\bar{M}}) \cdot \bar{\psi} \\
&= 2^{\#L+\#M}\int_{\mathbb{C}^n} \varphi_{L\bar{M}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\bar{\psi}) \quad \text{(由分部积分)} \\
&= 2^{\#L+\#M}\int_{\mathbb{C}^n} \varphi_{L\bar{M}} \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\psi)} \\
&= (\varphi_{L\bar{M}} dz_L \wedge \delta\bar{z}_M, \partial_k(\psi \cdot dz_L \wedge d\bar{z}_M)) \\
&= (\varphi, \partial_k(\psi dz_L \wedge d\bar{z}_M))\text{。}
\end{aligned}$$

同样, $\bar{\partial}_k$ 的伴随算子是 $-\partial_k$。

我们可以把 $A_c^{**}(\mathbb{C}^n)$ 中的所有的算子用这些基本算子的方式表示: 显然有

$$\begin{aligned}
\partial &= \sum_k \partial_k e_k = \sum_k e_k \partial_k, \\
\bar{\partial} &= \sum \bar{\partial}_k \bar{e}_k = \sum \bar{e}_k \bar{\partial}_k,
\end{aligned}$$

并且取伴随得到,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^* &= -\sum \partial_k \bar{i}_k, \\
\partial^* &= -\sum \bar{\partial}_k i_k\text{。}
\end{aligned}$$

L 定义为与 $\mathbb{C}^n$ 上定义的标准 Kähler 形式的外积, 所以得到,

$$L = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum e_k \bar{e}_K$$

和伴随算子

$$\Lambda = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \bar{i}_k i_k\text{。}$$

所以,

$$\begin{aligned}
\Lambda\partial &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k,l} \bar{i}_k i_k \partial_l e_l \\
&= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k,l} \partial_l \bar{i}_k i_k e_l \\
&= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_k \partial_k \bar{i}_k i_k e_k + \sum_{k\neq l} \partial_l \bar{i}_k i_k e_l\right)\text{。}
\end{aligned}$$

为了求第一项, 写出

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_k \partial_k \bar{i}_k i_k e_k &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \partial_k \bar{i}_k e_k i_k - \frac{2\sqrt{-1}}{2}\sum \partial_k \bar{i}_k \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \partial_k e_k \bar{i}_k i_k - \sqrt{-1}\sum \partial_k \bar{i}_k\text{。}\end{aligned}$$

求第二项,

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k\neq l} \partial_l \bar{i}_k i_k e_l &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{l\neq k} \partial_l \bar{i}_k e_l i_k \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \partial_l e_l \bar{i}_k i_k\text{。}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\Lambda\partial &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k,l} \partial_l e_l \bar{i}_k i_k + \sqrt{-1}\sum \partial_k \bar{i}_k \\ &= \partial\Lambda + \sqrt{-1}\bar{\partial}^*,\end{aligned}$$

所以证明了 $\mathbb{C}^n$ 上的恒等式。

为了证明 Kähler 流形上的结果, 我们利用密切条件来证明恒等式在任意点成立: 对 $z_0 \in M$, 我们可以选择度量的一个余标架 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, 使得 $d\varphi_i(z_0) = 0$。用 φ_I 代替 dz_I 后 Λ 的表达式还成立; 我们在本质上可以对 $[\Lambda, \bar{\partial}]\eta$ 做象 $\mathbb{C}^n$ 上一样的计算, 只不过多了包含 $\bar{\partial}\varphi_i$ 的项。然而, 因为 $[\Lambda, \bar{\partial}]$ 只包括一阶微分, 所以所有的额外项将有一个因子 $\bar{\partial}\varphi_i$, 并因此在 z_0 处等于零。同样, 我们已经计算了 $\mathbb{C}^n$ 上的 $\partial^*\eta = C_n * \partial * \eta$, 它与 $\sqrt{-1}[\Lambda, \bar{\partial}]\eta$ 一致; 除了包含 $\bar{\partial}\varphi_i$ 的额外项外, 用 φ_i 的方式在 M 上的计算也是一样的, 额外项在 z_0 也等于零。因此, 我们得到恒等式在 z_0 成立, 从而处处成立。

这个讨论是一般原理的一个例子: *如果任意内蕴定义的恒等式只包含度量及其一阶微分并且在有欧氏度量的 $\mathbb{C}^n$ 上成立, 那么它也在 Kähler 流形上成立。*

现在, 有一些结论: 如果 $\Delta_d = dd^* + d^*d$ 是 d-Laplace 算子, 我们得到

$$[L, \Delta_d] = 0,$$

或者等价地,

$$[\Lambda, \Delta_d] = 0\text{。}$$

证明: 首先注意到, 因为 ω 是闭的, 所以

$$d(\omega \wedge \eta) = w \wedge d\eta,$$

即,

$$[L, d] = 0,$$

并且因此通过取伴随得到,

$$[\Lambda, d^*] = 0。$$

现在,

$$\begin{aligned}\Lambda(dd^* + d^*d) &= (d\Lambda d^* - 4\pi d^{c*}d^*) + d^*\Lambda d \\ &= d\Lambda d^* + (4\pi d^*d^{c*} + d^*\Lambda d) \\ &= (dd^* + d^*d)\Lambda。\end{aligned}$$

证毕

就象前面所提到的一样, 我们还得到

$$\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial。$$

证明: 首先我们证明 $\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial = 0$: 因为 $\Lambda\partial - \partial\Lambda = \sqrt{-1}\bar\partial^*$, 我们得到

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}(\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) &= \partial(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\partial \\ &= \partial\Lambda\partial - \partial\Lambda\partial = 0。\end{aligned}$$

现在,

$$\begin{aligned}\Delta_d &= (\partial + \bar\partial)(\partial^* + \bar\partial^*) + (\partial^* + \bar\partial^*)(\partial + \bar\partial) \\ &= (\partial\partial^* + \partial^*\partial) + (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) + (\partial\bar\partial^* + \bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial + \bar\partial^*\partial) \\ &= (\partial\partial^* + \partial^*\partial) + (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) \\ &= \Delta_\partial + \Delta_{\bar\partial},\end{aligned}$$

所以我们必须证明

$$\Delta_\partial = \Delta_{\bar\partial}。$$

为此,

$$\begin{aligned}-\sqrt{-1}\Delta_\partial &= \partial(\Lambda\bar\partial - \bar\partial\Lambda) + (\Lambda\bar\partial - \bar\partial\Lambda)\partial \\ &= \partial\Lambda\bar\partial - \partial\bar\partial\Lambda + \Lambda\bar\partial\partial - \bar\partial\Lambda\partial,\end{aligned}$$

并且因此

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Delta_{\bar\partial} &= (\bar\partial(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\bar\partial) \\ &= \bar\partial\Lambda\partial - \bar\partial\partial\Lambda + \Lambda\partial\bar\partial - \partial\Lambda\bar\partial \\ &= \sqrt{-1}\Delta_\partial,\end{aligned}$$

这是因为 $\bar\partial\partial = -\partial\bar\partial$。 证毕

作为直接的推论我们得到, Δ_d 保持双阶次; 即

$$[\Delta_d, \Pi^{pq}] = 0。$$

这些恒等式有两个主要应用: *Hodge* 分解和 *Lefschetz* 分解和定理。我们首先讨论 Hodge 分解:

设

$$\begin{aligned} H^{p,q}(M) &= \frac{Z_d^{p,q}(M)}{dA^*(M) \cap Z_d^{p,q}(M)}, \\ \mathscr{H}_d^{p,q}(M) &= \{\eta \in A^{p,q}(M) : \Delta_d \eta = 0\}, \\ \mathscr{H}_d^{r}(M) &= \{\eta \in A^{r}(M) : \Delta_d \eta = 0\}。 \end{aligned}$$

注意, 第一组是由复结构内蕴定义的, 而后面两组依赖于特殊度量。由 Δ_d 与 $\Pi^{p,q}$ 的交换性和 Δ_d 是实算子的结果, 调和形式满足

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathscr{H}^r(M) &= \bigoplus_{p+q=r} \mathscr{H}^{p,q}(M), \\ \mathscr{H}^{p,q}(M) &= \overline{\mathscr{H}^{q,p}(M)}。 \end{cases}$$

另一方面, 对纯 (p,q) 型闭形式 η, 有

$$\eta = \mathscr{H}(\eta) + dd^*G(\eta),$$

其中调和部分 $\mathscr{H}(\eta)$ 也是纯 (p,q) 型的。因此,

$$H^{p,q}(M) \cong \mathscr{H}^{p,q}(M)。$$

把它与 $(*)$ 和 Laplace 算子 Δ_d 的 Hodge 定理

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) \cong \mathscr{H}^*(M)$$

结合起来, 我们得到著名的

Hodge 分解: 对紧致 *Kähler* 流形 M, 复上同调满足

$$\begin{cases} H^r(M,\mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M), \\ H^{p,q}(M) &= \overline{H^{q,p}(M)}。 \end{cases}$$

因为 $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial}$, 所以我们得到 $\mathscr{H}_d^{p,q}(M) = \mathscr{H}_{\bar\partial}^{p,q}(M)$, 并且因此

$$H^{p,q}(M) \cong H_{\bar\partial}^{p,q}(M) \cong H^q(M, \Omega^p)。$$

特别是, 取 $q = 0$, 那么

$$H^{p,0}(M) = H^0(M, \Omega^p)$$

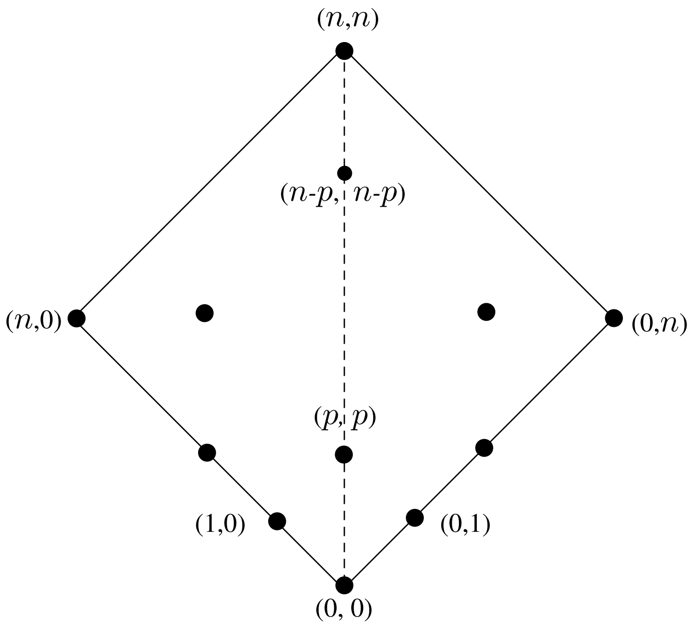


Figure 6

是全纯 p 形式的空间。于是全纯形式对紧致流形上任意 *Kähler* 度量是调和的。

我们还注意到:

奇次 *Betti* 数 $b_{2q+1}(M)$ 是偶数。

证明: 如果我们把 *Hodge* 数定义为

$$h^{p,q}(M) = \dim H^{p,q}(M),$$

那么, Hodge 分解给出

$$\begin{aligned} b_r(M) &= \sum_{p+q=r} h^{p,q}(M), \\ h^{p,q}(M) &= h^{q,p}(M)。 \end{aligned}$$

取 $r = 2q+1$, 我们找到

$$b_{2q+1}(M) = 2\left[\sum_{p=0}^{q} h^{p,2q+1-p}(M)\right]。$$

我们可以把紧致 Kähler 流形的上同调群图示在 *Hodge* 菱形(见图6)中, 使得 M 的第 k 上同调群可以作为第 k 行中群的和而快速读出。 $*$ 算子给出了关于菱形中心的一个对称性; 共轭给出了关于中垂线的对称性。

作为 Hodge 分解的直接应用, 我们得到

推论:

$$H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p) = H_{\bar\partial}^{p,q}(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 0, & 如果 p \neq q, \\ \mathbb{C}, & 如果 p = q。 \end{cases}$$

证明: 显然, 因为 $H^{2k+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = 0$, 所以对 $p+q$ 为奇数我们得到 $H_{\bar\partial}^{p,q}(\mathbb{P}^n) = 0$; 因为 $H^{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, 所以对 $p \neq k$ 我们得到,

$$\begin{aligned} 1 &= b_{2k}(\mathbb{P}^n) \geqslant h^{p,2k-p}(\mathbb{P}^n) + h^{2k-p,p}(\mathbb{P}^n) \\ &= 2 \cdot h^{p,2k-p} \\ &\Rightarrow h^{p,2k-p}(\mathbb{P}^n) = 0, \end{aligned}$$

并且因此

$$H_{\bar\partial}^{p,p}(\mathbb{P}^n) \cong H_{\mathrm{DR}}^{2p}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{C}。$$

证毕

特别注意,

在 $\mathbb{P}^n$ 上没有非零整体全纯形式。

Lefschetz 分解

Hodge 恒等式的另外一个重要应用是紧致 Kähler 流形的上同调的 Lefschetz 分解。为了正确地讨论它, 我们必须首先离题来讨论 sl_2 的表示。

sl_2 的表示: sl_2 是 SL_2 群的李代数; 它可表示为迹为零的 2×2 复矩阵的矢量空间, 并且满足交换括号

$$[A, B] = AB - BA。$$

我们取标准生成元

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它们满足下列关系:

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y。$$

现在, 设 V 是有限维复矢量空间, $gl(V)$ 是它的内自同构代数。我们想研究李代数映射

$$\rho : sl_2 \to gl(V),$$

即, 线性映射, 使得

$$\rho([A, B]) = \rho(A)\rho(B) - \rho(B)\rho(A)。$$

这样的映射称为 V 中 sl_2 的一个表示; V 称为一个 sl_2-模。在 $\rho(sl_2)$ 下固定的 V 的子空间称为子模; 如果 V 没有非平庸的子模, 那么 V (或 ρ) 称为不可约的。由基本结果(我们不在这里证明它), sl_2 模 V 的每个子模 W 都有一个补子模 $W^\perp$; 因此, 每个 sl_2 模是不可约 sl_2 模的直和, 并且, 为了研究 sl_2 的表示, 我们只需要研究不可约模。

于是, 假设 V 是一个不可约 sl_2 模。研究 V 的结构的关键是研究 $\rho(H)$ 的本征空间(从现在开始我们将略去 ρ)。它们称为权空间。首先, 注意到, 如果 $v \in V$ 是 H 的本征矢量, 本征值为 λ, 那么, Xv 和 Yv 也是 H 的本征矢量, 本征值分部为 $\lambda+2$ 和 $\lambda-2$: 这从下式得到,

$$\begin{aligned} H(Xv) &= XHv + [H, X]v \\ &= X\lambda v + 2Xv \\ &= (\lambda+2)Xv, \end{aligned}$$

对 Yv 类似。因为 H 只能有有限个本征值, 由此我们得到 X 和 Y 是幂零的。如果 $v \in V$ 是 H 的一个本征矢量并且 $Xv = 0$, 那么我们称 v 是本原的; 显然有本原元素。

命题: 如果 $v \in V$ 是本原的, 那么 V 作为一个矢量空间由

$$v, Yv, Y^2v, \cdots$$

生成。

证明: 因为 V 是不可约的, 我们只需要证明 $\{Y^iv\}$ 的线性张开 V' 在 sl_2 下是固定的。显然, $HV' \subset V'$ 和 $YV' \subset V'$。我们通过归纳法来证明 $XV' \subset V'$: $Xv = 0$ 平庸地处在 V' 中, 并且一般有

$$XY^nv = YXY^{n-1}v + HY^{n-1}v;$$

所以,

$$XY^{n-1}v \in V' \Rightarrow XY^nv \in V'。$$

证毕

注意, 非零的元素 $\{Y^nv\}_n$ 是线性独立的, 因为它们都是不同本征值的 H 的本征矢量。由此, 我们有 $V: V = \oplus V_\lambda$ 这样的描述, 其中每个 V_λ 是一维的,

$$H(V_\lambda) = V_\lambda, \quad X(V_\lambda) = V_{\lambda+2}, \quad Y(V_\lambda) = V_{\lambda-2}。$$

命题: H 的所有本征值是整数, 并且我们可以写作

$$V = V_n \oplus V_{n-2} \oplus \cdots \oplus V_{-n+2} \oplus V_{-n}。$$

证明: 设 v 是本原的, 并且假设

$$Y^nv \neq 0, \qquad Y^{n+1}v = 0,$$

并且 $Hv = \lambda v$。那么,

$$\begin{aligned} Xv &= 0, \\ XYv &= YXv + Hv = \lambda v, \\ XY^2v &= YXYv + HYv \\ &= Y\lambda v + (\lambda+2)Yv = (\lambda+\lambda-2))Yv, \end{aligned}$$

并且一般有 $XY^m v = YXY^{m-1}v + HY^{m-1}v$, 所以我们得到

$$\begin{aligned} XY^m v &= (\lambda + (\lambda-2) + (\lambda-4) + \cdots + (\lambda - 2(m-1)))Y^{m-1}v \\ &= (m\lambda - m^2 + m)Y^{m-1}v, \end{aligned}$$

并且因为 $Y^n v \neq 0, Y^{n+1}v = 0$, 所以

$$(n+1)\lambda - (n+1)^2 + n + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = n。$$

证毕

总之, 不可约 sl_2 模的指标为非负整数 n; 对这样的 n, 相应的 sl_2 模 $V(n)$ 的维数为 $n+1$。显然,

$$V(n) \cong \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$$

是矢量空间 $\mathbb{C}^2$ 的 n 次对称幂。作用在 $V(n)$ 上的 H 的本征值是 $-n, -n+2, \cdots, n-2, n$, 每个出现一次。

对每个 sl_2 模 V(不必是不可约的), 我们定义 V 的 *Lefschetz* 分解 如下: 设 $PV = \mathrm{Ker}\rho(X)$; 那么,

$$V = PV \oplus YPV \oplus Y^2PV \oplus \cdots,$$

并且这个分解与到 H 的本征空间的分解相容。我们还得到映射

$$V_m \underset{X^m}{\overset{Y^m}{\leftrightarrows}} V_{-m}$$

是一个同构。最后, 一般地,

$$(\mathrm{Ker}X) \cap V_k = \mathrm{Ker}(Y^{k+1} : V_k \to V_{-k-2})。$$

我们现在回到 Kähler 度量为 $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$ 的紧致复流形 M。首先, 我们希望计算出算子 L 和 Λ 的交换子 $[L, \Lambda]$; 它可以利用前面定义的算子 $e_k, \bar{e}_k, i_k$ 和 $\bar{i}_k$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上得到。回想一下,

$$L = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum e_k \bar{e}_k \quad 和 \quad \Lambda = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \bar{i}_k i_k;$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} [L, \Lambda] &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k,l} e_k \bar{e}_k \bar{i}_l i_l - \sum_{k,l} \bar{i}_l i_l e_k \bar{e}_k\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k \neq l}(e_k \bar{e}_k \bar{i}_l i_l - \bar{i}_l i_l e_k \bar{e}_k) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_k (e_k \bar{e}_k \bar{i}_k i_k - \bar{i}_k i_k e_k \bar{e}_k)。 \end{aligned}$$

由交换关系, 第一个求和的每项都是零; 对第二项, 我们得到

$$\begin{aligned} e_k\bar{e}_k\bar{i}_k i_k &= 2e_k i_k - e_k\bar{i}_k\bar{e}_k i_k, \\ \bar{i}_k i_k e_k\bar{e}_k &= 2\bar{i}_k\bar{e}_k - \bar{i}_k e_k i_k\bar{e}_k, \end{aligned}$$

并且因为 $e_k\bar{i}_k\bar{e}_k i_k = \bar{i}_k e_k i_k \bar{e}_k$, 所以得到

$$\begin{aligned} [L,\Lambda] &= \frac{1}{2}\sum_k (e_k i_k - \bar{i}_k\bar{e}_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_k (2 - i_k e_k - \bar{i}_k\bar{e}_k) \\ &= n - \frac{1}{2}\sum (i_k e_k + \bar{i}_k\bar{e}_k)。 \end{aligned}$$

为了计算它, 注意到如果 $k\in J$ 有 $i_k e_k(dz_J\wedge d\bar{z}_K)$ 等于零, 其它的等于 $2dZ_J\wedge d\bar{z}_K$; 如果 $k\in K$ 有 $\bar{i}_k\bar{e}_k(dz_J\wedge d\bar{z}_K)$ 等于零, 其它的等于 $2dz_J\wedge d\bar{z}_K$。因此,

$$\begin{aligned} \sum_k (i_k e_k + \bar{i}_k\bar{e}_k)(dz_J\wedge dz_K) &= 2\sum_{k\notin J} dz_J\wedge d\bar{z}_K + 2\sum_{k\in K} dz_J\wedge d\bar{z}_K \\ &= (2(n - {}^{\#}J) + 2(n - {}^{\#}K))(dz_J\wedge d\bar{z}_K)。 \end{aligned}$$

并且因此在 $A_c^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ 上有

$$[L,\Lambda] = p + q - n。$$

因为 L 和 Λ 都是代数算子, 所以恒等式在任意 Kähler 流形上成立。

现在, 设

$$h = \sum_{p=0}^{2n} (n-p)\Pi^p;$$

因为 $L: A^p(M)\to A^{p+2}(M)$ 和 $\Lambda: A^p(M)\to A^{p-2}(M)$, 所以我们得到

$$(*)\qquad \begin{aligned} [\Lambda, L] &= h, \\ [h, L] &= -2L, \\ [h,\Lambda] &= 2\Lambda。 \end{aligned}$$

算子 L,Λ 和 h 都与 Δ_d 可交换, 并且因此作用在关系为 $(*)$ 的调和空间 $\mathscr{H}_d^*(M)\cong H^*(M)$ 上。从而通过对应

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \Lambda,$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to L,$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to h;$$

本征值为 $(n-p)$ 的 h 的本征空间为 $H^p(M)$。把有限维 sl_2 的表示上的结果应用到这个表示上就得到

强 Lefschetz 定理: 映射

$$L^k : H^{n-k}(M) \to H^{n+k}(M)$$

是一个同构, 而且, 如果我们定义了**本原**上同调

$$\begin{aligned} P^{n-k}(M) &= \mathrm{Ker} L^{k+1} : H^{n-k}(M) \to H^{n+k+2}(M) \\ &= (\mathrm{Ker}\Lambda) \cap H^{n-k}(M), \end{aligned}$$

那么, 我们得到

$$H^m(M) = \bigoplus_k K^k P^{m-2k}(M),$$

它称为 **Lefschetz 分解**。

注意, Lefschetz 分解与 Hodge 分解相容; 即, 如果我们设

$$P^{p,q} = (\mathrm{Ker}\Lambda) \cap H^{p,q}(M),$$

那么

$$P^l(M) = \bigoplus_{p+q=l} P^{p,q}(M)。$$

如果流形 M 可嵌入有诱导度量的射影空间 $\mathbb{P}^N$, 那么我们可以给出 Lefschetz 理论的下列几何解释。我们已经知道, 形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \|Z\|^2$$

在 $\mathbb{P}^N$ 中是闭形式但不是恰当形式。因为 $H^2(\mathbb{P}^N)$ 是一维的, 所以 $[\omega] \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^N)$ Poincaré 对偶于超平面 $H \subset \mathbb{P}^N$ 的一些非零多重的同调类。实际上, $[\omega]$ Poincaré 对偶于 (H), 因为读者可以验证, 通过在直线 $l \cong \mathbb{P}^1$ 上积分 ω 就得到了

$$\int_l \omega = 1 = {}^{\#}(H \cdot l)。$$

从此处我们可以知道, 对于一个子流形 $M \subset \mathbb{P}^N$, 诱导度量的伴随 $(1,1)$ 形式 $\omega|_M$ Poincaré 对偶于解析子簇 $V = M \cap H \subset M$ 的同调类 (V)。强 Lefschetz 定理的 Poincaré 对偶化说法认为, 与 $(N-k)$ 维平面 $\mathbb{P}^{N-k} \subset \mathbb{P}^N$ 相交的运算给出同构

$$H_{n+k}(M) \overset{\cap \mathbb{P}^{N-K}}{\longrightarrow} H_{n-k}(M)。$$

注意, 在这个解释中, M 的本原上同调 $P^{n-k}(M)$ 通过同构

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{n+k}(M) & & \\ & \overset{L^k}{\nearrow} & & \overset{\text{P.D.}}{\nwarrow} & \\ H^{n-k}(M) & & & & H_{n-k}(M) \\ & \underset{\text{P.D.}}{\searrow} & & \underset{\cap \mathbb{P}^{N-k}}{\swarrow} & \\ & & H_{n+k}(M) & & \end{array}$$

对应到不与超平面相交的 $(n-k)$ 维闭链的子群, 即, 下列映射的像:

$$H_{n-k}(M-V) \to H_{n-k}(M)。$$

这样的闭链称为*有限闭链*, 因为 $M-V$ 是 M 的"有限部分" $M \cap \mathbb{C}^N$; 当我们证明超平面截面的 Lefschetz 定理时, 它的重要性更明显。

作为 Hodge 分解和 Lefschetz 分解的另一个应用, 我们将讨论 Hodge–Riemann 双线性关系。通过设

$$Q(\xi, \eta) = \int_M \xi \wedge \eta \wedge \omega^k,$$

我们定义一个双线性形式

$$Q : H^{n-k}(M) \otimes H^{n-k}(M) \to \mathbb{C}。$$

注意, 因为 ω 是实的, 所以 Q 定义了在 $H^{n-k}(M, \mathbb{R})$ 上的双线性形式。通过型方面的考察, 我们得到

$$Q(H^{p,q}, H^{p',q'}) = 0 \qquad 除非 p = q', q = p'。$$

*Hodge–Riemann 双线性关系*断言: 对一个本原类 $\xi \in P^{p,q}(M)$ 和 $k = p+q$,

$$\sqrt{-1}^{p-q}(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2} Q(\xi, \bar{\xi}) > 0。$$

如果 $p+q$ 是偶数, 这也可以说成: 在实矢量空间

$$(P^{p,q} \oplus P^{q,p}) \cap H^{p+q}(M, \mathbb{R}) = \{\xi + \bar{\xi}, \xi \in P^{p+q}(M)\} \subset H^{p+q}(M)$$

上, 二次形式 $\sqrt{-1}^{p-q}(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2} Q$ 是正定的; 如果 $p+q$ 是奇数, 双线性关系至少告诉我们, Q 是 $P^{p+q}(M)$ 上非退化的反对称形式。在任一种情况下, 因为我们有 Lefschetz 分解

$$H^m = \oplus L^k P^{m-2k}$$

和 $Q(L^k \xi, L^k \eta) = Q(\xi, \eta)$, 所以从双线性形式得到, Q 在 $H^{n-k}(M)$ 上是非退化的。

我们不一般性地完全证明双线性关系, 但是在某些情形下验证它, 包括了在我们的几何应用中要用到的所有情形。(一般性证明是基于下列事实: 在对应于点 $x \in M$ 的微分形式的整个外代数

$$V = \Lambda^* \mathbb{C}^n \otimes \Lambda^* \overline{\mathbb{C}^n}$$

上, 有一个如上给出的 sl_2 作用 $\{L, \Lambda, h\}$。把 V 分解到本原空间 $P^k V$ 中同在酉群 U_n 的作用下分解 V 是一样的, 并且因此由 Schur 引理, P^k 上任意 U_n 不变的二次形式必须有定义。M 上的本原同调形式就是对每个 $x \in M$ 处在 P^k 中的那些, 并且它得到了一个证明。在 sl_2 以及 $\pi^{(p,q)}$ 下分解 V 得到与 U_n 的作用下一样的不可约因子, 这个结果在 Hermann Weyl 的 *The Classical Groups* 一书中给出证明, ——一般地, 它意味着没有更多的 Hodge 恒等式。)

首先, 设 M 是紧致 Riemann 曲面。由 Hodge 分解得到,

$$\begin{aligned} H^1(M,\mathbb{C}) &= H^{1,0}(M)\oplus H^{0,1}(M) \\ &\cong H^0(M,\Omega^1)\oplus\overline{H^0(M,\Omega^1)}。\end{aligned}$$

于是, M 上独立的全纯 1 形式(经典上称为第一类微分)的数目等于 $b_1(M)/2$; 这实际上是在复流形的拓扑和它的解析结构之间建立的第一个联系。为了验证 M 的双线性关系, 设 $\xi=h(z)dz\in H^{1,0}(M)$; 我们得到 $\sqrt{-1}^{p-q}(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2}=\sqrt{-1}$, 并且

$$\begin{aligned} Q(\xi,\bar{\xi}) &= \sqrt{-1}\int_M |h(z)|^2 dz\wedge d\bar{z} \\ &> 0。\end{aligned}$$

一般地, 对任意维数的 M, 通过型方面的考虑, $H^{p,0}(M)$ 和 $H^{0,p}(M)$ 是本原的, 并且对验证它们的双线性关系也用同样的计算。实际上, 它是通过推导全纯 q 形式的 Hodge–Riemann 双线性关系来起作用, 对全纯 q 形式, 我们首先证明了全纯形式单射到紧致 Kähler 流形的上同调中。

现在, 设 $\dim M=2$; 只需对 $P^{1,1}$ 来验证双线性关系。设 ξ 是一个实本原调和 $(1,1)$ 形式; 用局域幺正余标架的方式, 我们写出

$$\xi=\sum\xi_{ij}\varphi_i\bar{\varphi}_j。$$

因为 ξ 是实的; 写出

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(\varphi_1\wedge\bar{\varphi}_1+\varphi_2\wedge\bar{\varphi}_2), \\ \xi\wedge\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(\xi_{11}+\xi_{22})\varphi_1\wedge\bar{\varphi}_1\wedge\varphi_2\wedge\bar{\varphi}_2, \end{aligned}$$

我们得到 ξ 是本原的意味着 $\xi_{11}+\xi_{22}=0$。对双线性关系,

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}^{p-q}(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2}Q(\xi,\bar{\xi}) &= -\int_M \xi\wedge\bar{\xi} \\ &= -\int_M(-\xi_{11}\bar{\xi}_{22}+2|\xi_{12}|^2-\xi_{22}\bar{\xi}_{11}) \\ &\quad\times\varphi_1\wedge\bar{\varphi}_1\wedge\varphi_2\wedge\bar{\varphi}_2 \\ &= -\left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^2\int_M(2|\xi_{11}|^2+2|\xi_{12}|^2)\Phi \\ &> 0。\end{aligned}$$

回想在一般的维数为 $2k$ 的定向紧致实流形上, 我们得到 $H^k(X,\mathbb{R})=H^k_{\mathrm{DR}}(X)$ 上的双线性形式, 其定义为

$$\underline{Q}(\eta,\xi)=\int_M\eta\wedge\xi;$$

由 Poincaré 对偶, $\underline{Q}$ 是非退化的。如果 k 是偶数, 那么 $\underline{Q}$ 是对称的, 并且我们可以把 $\underline{Q}$ 的符号差作为拓扑不变量结合到 X, 其定义为 $\underline{Q}$ 的矩阵表示中正本征值的数目减去负本征值的数目。$\underline{Q}$ 的符号差称为流形 X 的指标 $I(X)$。当然, 如果 M 是维数为 $2n$ 的紧致 Kähler 流形, 那么, 在 $H^{2n}(M,\mathbb{R})$ 中 $Q=\underline{Q}$, 并且我们可以利用双线性关系计算 M 的指标:

$$\begin{aligned} H^{2n}(M) &= \oplus L^k P^{2(n-k)}(M) \\ &= \bigoplus_{\substack{p+q\equiv 0(2) \\ \leqslant 2n}} L^{n-(p+q)/2} P^{p,q}(M)。\end{aligned}$$

我们知道, 对 $p+q\equiv 0(2)$, 在实空间 $(P^{p,q}\oplus P^{q,p})\cap H^{p+q}(M,\mathbb{R})$ 上 $\sqrt{-1}^{p-q}(-1)^{(p+q)(p+q-1)/2}Q>0$; 因为 $Q(L\eta,L\xi)=Q(\eta,\xi)$, 所以我们得到

$$\begin{aligned} I(M) &= \sum_{\substack{p+q\equiv 0(2) \\ \leqslant 2n}} (\sqrt{-1}^{p-q}(-1)^{(p+q)(p+q-1)/2}\dim P^{p,q}(M) \\ &= \sum_{\substack{p+q\equiv 0(2) \\ \leqslant 2n}} (-1)^p \dim P^{p,q}(M)。\end{aligned}$$

现在, 由 Lefschetz 分解我们得到

$$h^{p,p+j}=\sum_{i=0}^{p}\dim P^{i,i+j};$$

因此, 沿着 Hodge 菱形的垂线,

$$\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\dim P^{i,i+j}=(-1)^p h^{p,p+j}+2\sum(-1)^i h^{i,i+j},$$

并且最后我们可以写出

$$I(M)=\sum_{p+q=2n}(-1)^p h^{p,q}+2\sum_{\substack{p+q\equiv 0(2) \\ \leqslant 2n}}(-1)^p h^{p,q},$$

或者,

$$I(M)=\sum_{p+q\equiv 0(2)}(-1)^p h^{p,q},$$

最后一个等式成立利用了对偶 $h^{p,q}=h^{n-p,n-q}$。特别注意, 在 Kähler 流形 M 上, $H^{1,1}(M)$ 的杯积 Q 正好有一个正本征值; 这个结果常常称为曲面的指标定理。

最后注意, 本节的 Hodge 定理和 Lefschetz 定理的一个差别是: Lefschetz 定理本质上是拓扑的, 而 Hodge 定理反映了特殊流形 M 的解析结构。比如, 如果我们取实流形, 给它两个不同的 Kähler 复结构, H^* 的 Hodge 分解可能改变——群 $(H^{p,q}(M)\oplus H^{q,p}(M))\cap H^{p+q}(M,\mathbb{Z})$ 的秩可能会跳动——但是 Lefschetz 同构和分解保持不变。

参考文献(中文)

黄正中, 微分几何导引, 南京大学出版社, 1992。(特别有层论和 Hodge 分解定理的证明。)

沈信耀, 同调论, 科学出版社, 2002。

候伯元, 候伯宇, 微分几何, 科学出版社, 1995。

第一章 复代数簇

在射影几何中, 代数簇被定义为复值齐次多项式零点的集合, 也可以先验地看作 $\mathbb{P}^n$ 的解析子簇。如果簇是光滑的, 那么我们可以处理伴随的抽象紧致复流形, 对簇而言, 它的性质是内蕴的, 即不依赖于簇的不同嵌入。泛泛地讲, 我们将把代数几何当作代数簇内蕴和外在(或射影)性质之间的相互影响来研究。

在第一节, 我们引入除子和线丛的概念; 对后面所有内容而言, 这里的内容很重要。因为紧致复流形不容许有整体全纯函数, 所以我们更希望可以将其结构反映在流形上整体亚纯函数和相应的除子线性系中; 这个观点在经典代数几何中是一个基本观点。与除子相伴的是全纯线丛, 与亚纯函数相伴的是线丛及全纯截面, 与线丛相伴的是其陈(示性)类。接下来的公式对处理代数簇上的余维数为 1 的子簇(曲线上的点, 曲面上的曲线等)提供了非常有用的方法, 这是 1950 年代早期由 Kodaira, Spencer 及其他人发展起来的。

构造有给定性质(比如, 在 Riemann 曲面上给定主部)的亚纯函数的根本问题是容许有局部解的问题, 其中, 把这些局部解粘在一起得到整体解的障碍可以用层上同调群来表示。至于在什么情形下这些更高阶的群等于零, *Kadaira 消没定理*提供了最有用的条件。这是一个值得注意的结果, 它通过位势论和微分几何来证明, 但是在最后, 证明了它等价于与复代数簇的超平面截面的拓扑位置有关的 Lefschetz 定理。第二节主要讨论这些问题。

在第三节, 我们进行下列过渡:

$$\{\text{抽象紧致复流形}\} \longrightarrow \{\text{射影空间中的代数簇}\}。$$

中间步骤是射影空间中的解析簇; *周定理*断言, 它必然是代数簇。在这里, 基本思想通过两个对象——“Riemann 球面上的整体亚纯函数” 和“有理单复变函数”——的等价来说明。事实上的后果是, 我们既可以在局部上复解析地, 也可以在整体上代数地得到同样的最后结果。在这个阶段, 我们的方法是解析的, 因为这更容易联系到代数簇的拓扑和度量性质, 但是, 最后对我们所讨论的多项式方程的解的理解是根本性的。

在第四节, 我们叙述和证明了从代数簇衍生出来的那些紧致复流形的 Kodaira 特征, 从而在簇的内蕴和外在性质之间提供了本质上的联系。这个嵌入定理和周定理是存在性定理——对于得到射影嵌入下确定簇的像的方程, 它们本身不提供构造方法——但是, 它们一起奠定了用解析方法处理代数几何的思想基础。

在本章的最后一节, 我们在某些方面详细讨论了 Grassmann 流形——一个簇, 它的点用射影空间中某个固定维数的线性子空间来表达, 它的内部结构反映了可变线性子空间与固定的线性子空间的非通有的相交。把这个讨论放在这里的一个原因是, Grassmann 流形很好地表现了本章的一般结构定理。另一个原因是在后面的章节, Schubert 运算将广泛使用, 而它是线性空间中从 Grassmann 流形的结构中继承的非通有的接合关系的定量表示。

1.除子和线丛

除子

设 M 是 n 维复流形, 但不一定紧致。我们回顾一些有关 M 中解析超曲面的知识, 它来自第零章第一节:

任意 $n-1$ 维解析子簇 $V \subset M$ 是一个解析超曲面, 即: 任给点 $p \in V \subset M$, 在 p 的邻域中, V 可以作为一个单全纯函数 f 的零点集合而确定。还有, 在 p 点的邻域中, 定义在 p 处且在 V 上等于零的任意全纯函数 g 被 f 整除。 f 被称为 p 点附近 V 的*局部定义函数*, 且除了在 p 处不等于零的一个函数因子之外是唯一的。

如果 V_1^* 是 $V^* = V - V_s$ 的一个连通分量, 那么 $\overline{V_1^*}$ 是 M 中的解析子簇。因此 V 可以唯一地表示为不可约解析超曲面的并:

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$

其中, V_i 是 V^* 的连通分量的闭集。特别是, V 是不可约的当且仅当 V^* 是连通的。

现在, 我们给出定义:

定义: M 上的*除子*是 M 的不可约解析超曲面的局部有限形式上的线性组合:

$$D = \sum a_i \cdot V_i。$$

这里, “局域有限”的意思是, 对任意 $p \in M$, 存在 p 的一个邻域, 它只与有限个出现在 D 中的 V_i 相交; 当然, 如果 M 是紧致的, 那么这就意味着求和是有限的。 M 中除子的集合自然形成一个加法群, 表示为 $\mathrm{Div}(M)$。

如果任给 i, $a_i \geqslant 0$, 那么除子 $D = \sum a_i V_i$ 称为*有效的*; 对有效的 D, 我们写作 $D \geqslant 0$。解析超曲面通常等价于除子 $\sum V_i$, 其中 V_i 是 V 的不可约分量。

设 $V \subset M$ 为不可约超曲面, $p \in V$ 为任意点, f 为 p 点附近 V 的局部定义函数。对定义在 p 点附近的任意全纯函数 g , 我们定义 *p 处 V 中 g 的次数* $\mathrm{ord}_{V,p}(g)$ 为最大整数 a , 使得在局域环 $\mathscr{O}_{M,p}$ 中,

$$g = f^a \cdot h。$$

由第9(10)页的结果: $\mathscr{O}_{M,p}$ 的互质元素在局域环附近保持互质, 我们得到, 对 M 上的全纯函数 g , $\mathrm{ord}_{V,p}(g)$ *不依赖于点* p 。我们可以直接定义 *V 中 g 的次数* $\mathrm{ord}_V(g)$ 为在任意点 $p \in V$ 处 V 中 g 的次数。注意, 对任意全纯函数 g, h , 任意不可约超曲面 V ,

$$\mathrm{ord}_V(gh) = \mathrm{ord}_V(g) + \mathrm{ord}_V(h)。$$

现在, 设 f 为 M 上的亚纯函数, 在局域上写作

$$f = \frac{g}{h},$$

其中，g, h 是全纯的且互质。对不可约超曲面 V , 我们定义

$$\mathrm{ord}_V(f) = \mathrm{ord}_V(g) - \mathrm{ord}_V(h)。$$

当 $\mathrm{ord}_V(f) = a > 0$ 时, 我们通常称 f 在 V 中有次数为 a 的零点, 当 $\mathrm{ord}_V(f) = -a < 0$ 时, f 在 V 中有次数为 a 的极点。

我们定义亚纯函数 f 的除子 (f) 为

$$(f) = \sum_V \mathrm{ord}_V(f) \cdot V。$$

如果 f 在局域上写作 g/h , 那么我们定义 f 的零点除子 $(f)_0$ 为

$$(f)_0 = \sum_V \mathrm{ord}_V(g) \cdot V,$$

和极点除子 $(f)_\infty$ 为

$$(f)_\infty = \sum_V \mathrm{ord}_V(h) \cdot V。$$

很明显, 只要我们要求 g 和 h 是互质的, 它们就是明确定义的, 且

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty。$$

除子也可以用层论的方法进行描述, 如下: 设 $\mathscr{M}^*$ 为 M 上不恒等于零的亚纯函数的乘法层，$\mathscr{O}^*$ 为不等于零的全纯函数子层。那么 M 上的除子就是商层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的整体截面。另一方面，$\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的整体截面 $\{f\}$ 由 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和 U_α 上

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$$

的亚纯函数 $f_\alpha \not\equiv 0$ 给出, 那么, 任给 $V \subset M$, 有

$$\mathrm{ord}_V(f_\alpha) = \mathrm{ord}_V(f_\beta),$$

且对 $\{f\}$, 我们可以伴随有除子

$$D = \sum_V \mathrm{ord}_V(f_\alpha) \cdot V,$$

其中, 对每个 V , 我们选择 α 使得 $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$。另外, 给定

$$D = \sum_{V_i} a_i V_i,$$

我们可以找到 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得在每个 U_α 中, 出现在 D 中的每个 V_i 都有一个局域定义函数 $g_{i\alpha} \in \mathscr{O}(U_\alpha)$。于是我们可以设定

$$f_\alpha = \prod_i g_{i\alpha}^{a_i} \in \mathscr{M}^*(U_\alpha)$$

来得到 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的整体截面。这些 f_α 称为 D 的局域定义函数。从定义立即得到, 等式

$$H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) = \mathrm{Div}(M)$$

实际上是一个同态。

给定复流形的一个全纯映射 $\pi: M \to N$, 通过对 N 上的每个除子 $D = (\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\})$ 伴随 M 上的拖回除子 $\pi^*D = (\{\pi^{-1}U_\alpha\}, \{\pi^* f_\alpha\})$, 我们定义一个映射

$$\pi^*: \mathrm{Div}(N) \to \mathrm{Div}(M);$$

只要 $\pi(M) \not\subset D$, 这就有明确的定义。注意, 对由解析超曲面 $V \subset N$ 给出的 N 上的除子, M 上的拖回除子 π^*V 处在 V 上, 但是不需要与解析超曲面 $\pi^{-1}(V) \subset M$ 相一致——可以出现多重度。

在接下来讨论线丛之前, 我们想再多评论一下。在 Riemann 曲面 M 上, 任意点都是一个不可约解析超曲面, 且因此明显有 $\mathrm{Div}(M)$ 总是很大的。这在某种意义上令人误解: 维数大于 1 的复流形 M 根本不需要有在它上面的任何非零除子。然而, 如果 M 被嵌入到射影空间 $\mathbb{P}^N$ 中, 那么, M 与 $\mathbb{P}^N$ 的超平面的相交生成了大量除子。实际上, 在所有紧致复流形之中, 可嵌入到射影空间的那些可以通过有"充分多"除子来被刻画, 在后面的章节中我们将在某种意义上把它精确化。

线丛

在本节所讨论的所有线丛都取作全纯的。回想对复流形 M 上的任意全纯线丛 $L \xrightarrow{\pi} M$, 我们可以找到 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和 $L_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$ 的平庸化

$$\varphi_\alpha : L_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}。$$

相对于平庸化 $\{\varphi_\alpha\}$, 由

$$g_{\alpha\beta}(z) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{L_z} \in \mathbb{C}^*$$

我们定义 L 的转换函数 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$。函数 $g_{\alpha\beta}$ 明显是全纯和不等于零的, 且满足

$$(*) \qquad \begin{cases} g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} &= 1, \\ g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} &= 1; \end{cases}$$

相反, 给定满足这些等式的函数 $\{g_{\alpha\beta} \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)\}$ 的集合体, 通过取所有 α 上 $U_\alpha \times \mathbb{C}$ 的并和由 $g_{\alpha\beta}(z)$ 的乘法来确定 $U_\alpha \times \mathbb{C}$ 和 $U_\beta \times \mathbb{C}$ 中的 $\{z\} \times \mathbb{C}$, 我们可以构造一个转换函数为 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 的线丛 L。

现在, 如上给出 L, 任给非零全纯函数 $f_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha)$ 的集合体, 我们可以通过

$$\varphi'_\alpha = f_\alpha \cdot \varphi_\alpha;$$

来定义 $\{U_\alpha\}$ 上 L 的任一平庸化; 于是, 相对于 $\{\varphi'_\alpha\}$ 的 L 的转换函数 $g'_{\alpha\beta}$ 由

$$(**) \qquad g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \cdot g_{\alpha\beta}$$

给出。另一方面, $\{U_\alpha\}$ 上 L 的任何其它的平庸化都可以用这种方法得到, 且因此我们得到, 转换函数的集合体 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{g'_{\alpha\beta}\}$ 确定同样的线丛等价于存在满足 $(**)$ 的函数 $f_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha)$。

由转换函数得到的线丛的描写很适用于层论的解释。首先, 线丛 $L \to M$ 的转换函数 $\{g_{\alpha\beta} \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)\}$ 表示系数在 $\mathscr{O}^*$ 中, M 上的一个 Čech 1-上链; 关系式 $(*)$ 直接断言 $\delta(\{g_{\alpha\beta}\}) = 0$, 即, $\{g_{\alpha\beta}\}$ 是一个 Čech 闭链。还有, 通过上一段, 两个闭链 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{g'_{\alpha\beta}\}$ 定义同样的线丛, 当且仅当它们的差别 $\{g_{\alpha\beta} \cdot g'^{-1}_{\alpha\beta}\}$ 是一个 Čech 上边缘; 因此, M上线丛的集合就是 $H^1(M, \mathscr{O}^*)$。

我们可以给 M 上的线丛集合以群的结构, 乘法由张量积给出, 逆运算由对偶丛给出。如果 L 由 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 的内容给出, L' 由 $\{g'_{\alpha\beta}\}$ 给出, 那么, 我们得到

$$L \otimes L' \sim \{g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}\}, \quad L^* \sim \{g^{-1}_{\alpha\beta}\},$$

且因此线丛集合上的群结构与 $H^1(M, \mathscr{O}^*)$ 上的群结构是一样的。群 $H^1(M, \mathscr{O}^*)$ 称为 M 的 *Picard 群*, 表示为 $\mathrm{Pic}(M)$。

我们现在描述除子和线丛之间的基本对应。设 D 是 M 上的除子, 在 M 的某些开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 上的局域定义函数为 $f_\alpha \in \mathscr{M}^*(U_\alpha)$。于是, 函数

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$$

在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中是全纯和非零的, 且在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 中有

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \cdot \frac{f_\beta}{f_\gamma} \cdot \frac{f_\gamma}{f_a} = 1。$$

由转换函数 $\{g_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta\}$ 给出的线丛称为 D 的伴随线丛, 写作 $[D]$。我们来验证它有明确的定义: 如果 $\{f'_\alpha\}$ 是 D 的任一局域定义函数, 那么 $h_\alpha = f_\alpha / f'_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha)$, 且对每对 α, β,

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{f'_\alpha}{f'_\beta} = g_{\alpha\beta} \cdot \frac{h_\beta}{h_\alpha}。$$

这个对应 $[\quad]$ 直接有如下性质: 首先, 如果 D 和 D' 是分别由局域定义函数 $\{f_\alpha\}$ 和 $\{f'_\alpha\}$ 给出的两个除子, 那么 $D + D'$ 由 $\{f_\alpha \cdot f'_a\}$ 给出; 得到

$$[D + D'] = [D] \otimes [D'],$$

因此映射

$$[\quad] : \mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Pic}(M)$$

是同态。其次, 如果对某些 M 上的亚纯函数 f 有 $D = (f)$, 那么, 我们可以把函数 $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ 看作任意覆盖 $\{U_\alpha\}$ 上 D 的局域定义函数; 因此, $f_\alpha / f_\beta = 1$ 且 $[D]$ 是平庸的。相反, 如果 D 由局域定义函数 $\{f_\alpha\}$ 给出且线丛 $[D]$ 是平庸的, 那么存在函数 $h_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha)$, 使得

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta};$$

那么, $f = f_\alpha \cdot h_\alpha^{-1} = f_\beta \cdot h_\beta^{-1}$ 是除子为 D 的 M 上的一个整体亚纯函数。因此, M 上伴随除子 D 的线丛 $[D]$ 是平庸的, 当且仅当 D 是一个亚纯函数的除子。我们称 M 上的两个除子 D 和 D' 是线性等价的并写作 $D \sim D'$, 如果对某些 $f \in \mathscr{M}^*(M)$ 有 $D = D' + (f)$, 或等价地如果有 $[D] = [D']$。

还有, 注意到 $[\quad]$ 是一个函子: 即, 如果 $f : M \to N$ 是复流形的一个全纯映射, 那么容易验证, 任给 $D \in \mathrm{Div}(N)$,

$$\pi^*([D]) = [\pi^*(D)]。$$

所有的这些结论都蕴含在对应 $[\quad]$ 的下列上同调解释中了。M 上的恰当层序列

$$0 \to \mathscr{O}^* \xrightarrow{i} \mathscr{M}^* \xrightarrow{j} \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^* \to 0$$

部分给出了上同调群的恰当序列

$$H^0(M, \mathscr{M}^*) \xrightarrow{j^*} H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathscr{O}^*)。$$

读者容易验证, 在自然等式

$$\mathrm{Div}(M) = H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) \quad 和 \quad \mathrm{Pic}(M) = H^1(M, \mathscr{O}^*)$$

下, 任给 M 上的亚纯函数 f, 有

$$j_* f = (f),$$

和任给 M 上的除子 D, 有

$$\delta D = [D]。$$

的确, 我们一般将打破以前乘法的概念, 对两个线丛的张量积写作 $L + L'$ 或对 L 的第 m次张量幂写作 mL。

我们现在将讨论线丛的全纯和亚纯截面。设 $L \to M$ 是全纯线丛, M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 上的平庸化为 $\varphi_\alpha : L_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$, 对应于 $\{\varphi_\alpha\}$ 的转换函数为 $\{g_{\alpha\beta}\}$。正如我们已经看到的, 平庸化 φ_α 诱导出同构

$$\varphi_\alpha^* : \mathscr{O}(L)(U_\alpha) \to \mathscr{O}(U_\alpha);$$

通过对应

$$s \in \mathscr{O}(L)(U) \to \{s_\alpha = \varphi_\alpha^*(s) \in \mathscr{O}(U \cap U_\alpha)\}$$

我们得到, $U \subset M$ 上 L 的截面正好由一组函数 $s_\alpha \in \mathscr{O}(U \cap U_\alpha)$给出, 此函数在 $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ 满足

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot s_\beta。$$

用同样的方法, U 上 L 的亚纯截面 s——定义为层 $\mathscr{O}(L) \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{M}$ 的截面——由一组亚纯函数 $s_\alpha \in \mathscr{M}(U \cap U_\alpha)$ 给出, 在 $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ 中满足 $s_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot s_\beta$。注意, L 的两个亚纯截面 $s, s' \not\equiv 0$ 的商是有明确定义的亚纯函数。

如果 s 是 L 的整体亚纯截面, $s_\alpha/s_\beta \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, 且因此任给不可约超曲面 $V \subset M$,

$$\mathrm{ord}_V(s_\alpha) = \mathrm{ord}_V(s_\beta)。$$

从而, 任给 α, 我们可以定义 V 上 s 的次数为

$$\mathrm{ord}_V(s) = \mathrm{ord}_V(s_\alpha)$$

使得 $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$; 我们取亚纯截面 s 的除子 (s) 为

$$(s) = \sum_V \mathrm{ord}_V(s) \cdot V。$$

从这个约定得到, s 是全纯的当且仅当 (s) 是有效的。

现在, 如果 $D \in \mathrm{Div}(M)$ 由局域定义函数 $f_\alpha \in \mathscr{M}(U_\alpha)$ 给出, 那么, 函数 f_α 明显地给出了 $[D]$ 的亚纯截面 s_f, $(s_f) = D$。相反, 如果 L 由转换函数为 $g_{\alpha\beta}$ 的平庸化 φ_α 给出, 且 s 是 L 的任意整体全纯截面, 我们得到:

$$\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta},$$

即, $L = [(s)]$。因此, 如果 D 是任何使得 $[D] = L$ 的除子, 那么存在 $(s) = D$ 的 L 的一个亚纯截面, 且任给 L 的亚纯截面 s, $L = [(s)]$。 特别是, 我们得到, L 是伴随于 M 上某些除子 D 的线丛, 当且仅当它有不恒等于零的一个整体亚纯截面; 它是一个有效除子的线丛当且仅当它有一个非平庸的整体全纯截面。

我们也可以从如下观点来看这个对应: 在 M 上给定除子

$$D = \sum a_i V_i,$$

设 $\mathscr{L}(D)$ 表示 M 上亚纯函数 f 的空间, 使得

$$D + (f) \geqslant 0,$$

即, 在 $M - \cup V_i$ 上是全纯的, 有

$$\mathrm{ord}_{V_i}(f) \geqslant -a_i。$$

我们用 $|D| \subset \mathrm{Div}(M)$ 表示线性等价于 D 的所有有效除子的集合; 任给 $L = [D]$, 我们把 $|D|$ 写作 $|L|$。设 s_0 为 $[D]$ 的一个整体亚纯截面, 有 $(s_0) = D$。那么, 任给 $[D]$ 的整体全纯截面, 商

$$f_s = \frac{s}{s_0}$$

是 M 上的亚纯函数, 有

$$(f_s) = (s) - (s_0) \geqslant -D,$$

即,

$$f_s \in \mathscr{L}(D)$$

且

$$(s) = D + (f_s) \in |D|。$$

另一方面, 任给 $f \in \mathscr{L}(D)$, $[D]$ 的截面 $s = f \cdot s_0$ 是全纯的。因此, s_0 的乘法给出等式

$$\mathscr{L}(D) \xrightarrow{\otimes s_0} H^0(M, \mathscr{O}([D]))。$$

现在, 假设 M 是紧致的。对每个 $D' \in |D|$, 存在 $f \in \mathscr{L}(D)$ 使得

$$D' = D + (f),$$

且, 相反地, 任意两个这样的函数 f, f' 差一个非零常数。因此, 我们有额外的对应

$$|D| \cong \mathbb{P}(\mathscr{L}(D)) \cong \mathbb{P}(H^0(M, \mathscr{O}([D])))。$$

一般地, 对某些 $L \to M$, 对应于 $\mathbb{P}(H^0(M, \mathscr{O}([D])))$ 的线性子空间的 M 上有效除子的族称为除子的*线性系*; 如果线性系有 $|D|$ 的形式, 即, 如果它包含线性等价于其任何项的每个有效除子, 那么它称为*完备的*。当我们讲线性系的维数时, 我们指的是用参数表示它的射影空间的维数; 因此, 对伴随于除子 D 的完备线性系的维数, 当我们写出 $\dim |D|$ 时, 有

$$\dim |D| = h^0(M, \mathscr{O}(D)) - 1。$$

维数为 1 的线性系称为*束*, 维数为 2 的称为*网*, 维数为 3 的称为*罗*。

我们在这里将谈谈线性系的两个特殊性质。第一个性质是初等的: 如果 $E = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^n}$ 是一个线性系, 那么, 任给 $\mathbb{P}^n$ 中线性独立的 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$, 有

$$D_{\lambda_0} \cap \cdots \cap D_{\lambda_n} = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{P}^n} D_\lambda。$$

在线性系中, 除子的公共交集称为体系的*基轨迹*; 特别是, 基轨迹中的除子 F——即, 使得任给 λ, 有 $D_\lambda - F \geqslant 0$——被称为 E 的一个*固定分量*。

第二个性质更值得注意; 就象第一个, 它对线性系也是特殊的, 不是除子一般族的情形, 甚至不是线性等价除子的一般族的情形。这就是

Bertini 定理: *不在体系基轨迹上的线性系的普通元素是光滑的。*

证明: 如果不在体系基轨迹上的线性系的一般元素是奇异的, 那么对包含在体系中的一般的束同样正确; 因此, 对于束来证明 Bertini 定理就足够了。

假设 $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ 是一个束, 在包含于 M 中的多圆盘 $\triangle$ 中由

$$D_\lambda = (f(z_1, \cdots, z_n) + \lambda \cdot g(z_1, \cdots, z_n) = 0)$$

给出, 假设 P_λ 是除子 $D_\lambda (\lambda \neq 0, \infty)$ 的奇异点但不在束的基轨迹 B 中。于是我们有

$$f(P_\lambda) + \lambda g(P_\lambda) = 0$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(P_\lambda) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z_i}(P_\lambda) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n。$$

因为 P_λ 不是 $\{D_\lambda\}$ 的基点, 那么 f 和 g 不能在 P_λ 都等于零, 且都不等于零; 因此,

$$\lambda = -\frac{f(P_\lambda)}{g(P_\lambda)}$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(P_\lambda) - \frac{f(P_\lambda)}{g(P_\lambda)} \cdot \frac{\partial g}{\partial z_i}(P_\lambda) = 0。$$

那么,

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{f}{g}\right)(P_\lambda) = \frac{(\partial f/\partial z_i)(P_\lambda) - [f(P_\lambda)/g(P_\lambda)] \cdot (\partial g/\partial z_i)(P_\lambda)}{g(P_\lambda)} = 0。$$

现在, 除子 D_λ 的奇异点的轨迹 V, 是 $\triangle$ 的一个解析子簇, 它局域上是在簇 $S \subset \triangle \times \mathbb{P}^1_\lambda$ 被方程 $\{f + \lambda g = 0, \partial f/\partial z_i + \lambda \partial g/\partial z_i = 0\}$ 切掉的 $\triangle$ 中的像。但是通过上面的计算, 比值 f/g 在 $V - B$ 的每个连通分量上是常数, 因此, V 只与不在 $\{D_\lambda\}$ 的基轨迹上的有限多除子 D_λ 相交。 证毕。

这里, 基本点是, 基轨迹为 B 的束 $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ 给出一个全纯映射

$$M - B \to \mathbb{P}^1,$$

因为由线性, 每个 $p \in M - B$ 在一个唯一的 D_λ 上。Bertini 定理是这个映射的 Sard 定理的细化。

对线丛这节我们做最后一个的讨论, 它在整书中都要重复使用。回想一下, 如果 $D = \sum a_i V_i$ 是复流形上任意有效除子, $s_0 \in H^0(M, \mathscr{O}([D])$ 是除子为 D 的 $[D]$ 的截面, 那么, 与 s_0 的张量化给出一个等式——在有 V_i 上次数 $\leqslant a_i$ 的极点的 M 上的亚纯函数和 $[D]$ 的全纯截面之间。更一般地, 如果 E 是 M 上任意全纯矢量丛, $\mathscr{E}$ 是它的全纯截面层, 那么, 我们把有 V_i 上次数 $\leqslant a_i$ 的极点的 E 的全纯截面层写作 $\mathscr{E}(D)$, 把有沿 V_i 次数 $\geqslant a_i$ 的零点的 E 的截面层写作 $\mathscr{E}(-D)$。再次有, 与 s_0 或 s_0^{-1} 张量化给出等式

$$(*) \qquad \begin{aligned} \mathscr{E}(D) &\xrightarrow{\otimes s_0} \mathscr{O}(E \otimes [D]), \\ \mathscr{E}(-D) &\xrightarrow{\otimes s_0^{-1}} \mathscr{O}(E \otimes [-D])。\end{aligned}$$

因此, 特别是, 如果 D 是光滑解析超曲面, 那么层序列

$$0 \to \mathscr{O}_M(E \otimes [-D]) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathscr{O}_M(E) \xrightarrow{r} \mathscr{O}_D(E|_D) \to 0$$

是恰当的, 其中 r 是限制映射。因此, 我们将默认等式 $(*)$, 把 $\mathscr{O}([D])$ 写作 $\mathscr{O}(D)$。

线丛的陈类

现在, 设 M 为维数为 n 的紧致复流形。层的恰当序列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^* \to 0$$

给出上同调

$$H^1(M, \mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z})$$

中的一个边缘映射。对线丛 $L \in \operatorname{Pic}(M) = H^1(M, \mathscr{O}^*)$, 我们把 L 的第一陈类 $c_1(L)$ (或简化为陈类) 定义为 $\delta(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$; 对 M 上的一个除子 D, 我们定义 D 的陈类为 $c_1([D])$。用有点含糊的话说, 我们以后有时把在自然映射 $H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2_{\mathrm{DR}}(M)$ 下 $c_1(L)$ 的像写作 $c_1(L) \in H^2_{\mathrm{DR}}(M)$。

作为这个定义的直接结果, 注意有:

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$$

和

$$c_1(L^*) = -c_1(L)。$$

还有, 如果 $f: M \to N$ 是复流形的全纯映射, 那么图

$$\begin{array}{ccc} H^1(M, \mathscr{O}^*) & \longrightarrow & H^2(M, \mathbb{Z}) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^1(N, \mathscr{O}^*) & \longrightarrow & H^2(N, \mathbb{Z}) \end{array}$$

是交换的, 使得对任何线丛 $L \to N$ 有,

$$c_1(f^*L) = f^*c_1(L)。$$

在本小节中, 我们将讨论的是陈类的两个不同解释; 然而, 首先我们希望做一下观察:

设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^*$ 分别表示 C^∞ 和非零的 C^∞ 函数层。那么, C^∞ 复线丛 L 的转换函数给出一个 Čech 上闭链

$$\{g_{\alpha\beta}\} \in C^1(M, \mathscr{A}^*),$$

并且, 通过与全纯丛同样的讨论, 除了一个 C^∞ 同构外, 丛 L 由上同调类 $[\{g_{\alpha\beta}\}] \in H^1(M, \mathscr{A}^*)$ 确定。现在, 我们有一个恰当层序列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{A} \xrightarrow{\exp} \mathscr{A}^* \to 0,$$

并且, 因为在 Čech 上同调中的长序列是函子的, 所以包含映射 $\mathscr{O} \to \mathscr{A}$ 和 $\mathscr{O}^* \to \mathscr{A}^*$ 给出了下列交换图:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(M, \mathscr{A}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathscr{A}^*) & \xrightarrow{\delta'} & H^2(M, \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ H^1(M, \mathscr{O}) & \longrightarrow & H^1(M, \mathscr{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(M, \mathbb{Z}), \end{array}$$

其中每行都是恰当的。因此, 我们可以把 C^∞ 线丛的陈类 $c_1(L)$ 定义为 $\delta'(L)$, 并且, 这个定义与上面的全纯丛的定义一致。但是, 在上一行, 我们得到 $H^1(M,\mathscr{A})=0$, 因为层 $\mathscr{A}$ 是好层; 结果就是: 除了一个 C^∞ 同构外, 复线丛由其陈类确定。

现在回想一下, 对秩为 k 的任意矢量丛 $E\to M$ 和 E 上的任意联络 D, 曲率算子 D^2 表示为 2-形式的 $k\times k$ 矩阵 Θ_α ——用 U_α 上 E 的平庸化 φ_α 的方式; 如果 Θ_β 是另一个平庸化, 那么我们有

$$\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\cdot\Theta_\beta\cdot g_{\alpha\beta}^{-1},$$

其中, $g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to GL_k$ 是相对于 φ_α 和 φ_β 的转换函数。特别是, 如果 E 是线丛, 因为 $GL_1=\mathbb{C}^*$ 是对易的, 所以, $\Theta=\Theta_\alpha=\Theta_\beta$ 是次数为 2 的整体定义的闭微分形式, 称为 E 的*曲率形式*。

再回想一下, 对维数为 k 的任意解析子簇 $V\subset M$, 我们已经定义了基本类 $(V)\in H_{2k}(M,\mathbb{R})$, 它由 $H^{2k}_{\mathrm{DR}}(M)$ 上的线性泛函给出:

$$\varphi\mapsto\int_V\varphi;$$

我们用 η_V 表示它的 Poincaré 对偶。特别是, 我们取 M 上除子 $D=\sum a_iV_i$ 的基本类为 $\sum a_i(V_i)$; 把它的 Pioncaré 对偶表示为

$$\eta_D=\sum a_i\cdot\eta_{V_i}。$$

本小节主要证明了

命题 1. 对任意曲率形式为 Θ 的线丛 L,

$$c_1(L)=\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right]\in H^2_{\mathrm{DR}}(M)。$$

2. 如果对某些 $D\in\mathrm{Div}(M)$ 有 $L=[D]$, 那么,

$$c_1(L)=\eta_D\in H^2_{\mathrm{DR}}(M)。$$

证明: 首先, 我们用相对于 M 的覆盖 $\underline{U}=\{U_\alpha\}$ 的平庸化 φ_α 和转换函数 $g_{\alpha\beta}$ 把线丛 $L\to M$ 的 $c_1(L)$ 的定义展开。我们可以假定开集 U_α 是单连通的, 并设

$$h_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log g_{\alpha\beta}。$$

由 δ 的定义, 如果我们设

$$\begin{aligned}z_{\alpha\beta\gamma} &= h_{\alpha\beta}+h_{\beta\gamma}-h_{\alpha\gamma}\\ &= \tfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\log g_{\alpha\beta}+\log g_{\beta\gamma}-\log_{\alpha\gamma}),\end{aligned}$$

那么, $\{z_{\alpha\beta\gamma}\}\in Z^2(\underline{U},\mathbb{Z})$ 是表示 $c_1(L)$ 的一个上闭链。

现在, 在 L 上选择任意的联络 D。用 U_α 上标架 $e_\alpha(z)=\varphi_\alpha^{-1}(z,1)$ 的方式, D 由其联络矩阵给出, 在这种情形下它是一个 1-形式 θ_α。就象我们在第零张第五节计算出的一样, 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中,

$$\theta_\alpha=g_{\alpha\beta}\theta_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}+dg_{\alpha\beta}\cdot g_{\alpha\beta}^{-1},$$

即,

$$\theta_\beta-\theta_\alpha=-g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}=-d(\log g_{\alpha\beta}),$$

并且, 曲率矩阵是整体 2-形式

$$\Theta=d\theta_\alpha-\theta_\alpha\wedge\theta_\alpha=d\theta_\alpha=d\theta_\beta。$$

因为 Θ 由一个闭 2-形式给出, $c_1(L)$ 由一个 Čech 上闭链给出, 所以我们现在必须考虑 de Rham 同构的显形式。从 de Rham 定理的证明, 我们有层的恰当序列

$$0\to\mathbb{R}\to\mathscr{A}^0\to\mathscr{Z}_d^1\to 0,\quad 0\to\mathscr{Z}_d^1\to\mathscr{A}^1\to\mathscr{Z}_d^2\to 0,$$

它给出边缘同构

$$\frac{H^0(\mathscr{Z}_d^2)}{dH^0(\mathscr{A}^1)}\xrightarrow{\delta_1}H^1(\mathscr{Z}_d^1),\quad H^1(\mathscr{Z}_d^1)\xrightarrow{\delta_2}H^2(\mathbb{R})。$$

为了计算 $\delta_1(\Theta)$, 我们把 Θ 在局域上写作 $d\theta_\alpha$; 从 δ_1 的定义我们得到,

$$\delta_1(\Theta)=\{\theta_\beta-\theta_\alpha\}\in Z^1(\mathscr{Z}_d^1)。$$

现在, $\theta_\beta-\theta_\alpha=-d\log g_{\alpha\beta}$, 所以

$$\begin{aligned}\delta_2\delta_1(\Theta)&=\delta_2(\{\theta_\beta-\theta_\alpha\})\\&=\{-(\log g_{\alpha\beta}+\log g_{\beta\gamma}-\log g_{\alpha\gamma})\}\\&=-2\pi\sqrt{-1}\cdot c_1(L)。\end{aligned}$$

为了证明命题 2, 我们必须证明: 对丛 $[D]$ 的曲率矩阵 Θ, 上同调类 $[(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta]$ 是 $(D)=\sum a_i(V_i)$ 的 Poincaré 对偶——即, 对每个闭的实形式 $\psi\in A^{2n-2}(M)$,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M\Theta\wedge\psi=\sum a_i\int_{V_i}\psi。$$

因为 $D\mapsto c_1([D])$ 和 $D\mapsto\eta_D$ 都是从 $\mathrm{Div}(M)$ 到 $H^2_{\mathrm{DR}}(M)$ 的同态, 所以我们可以把 $D=V$ 取为不可约子簇。

首先, 我们计算 $[D]$ 上度量联络的曲率形式。为此, 设 e 是 $[V]$ 的局域非零全纯截面, 并且写作

$$|e(z)|^2=h(z)。$$

那么对任意截面 $s=\lambda\cdot e$, 采用标架 e 的方式的度量联络 D 的联络矩阵 θ 必须满足

$$\theta=\theta^{0,1}$$

和

$$\begin{aligned} d(|s|^2) &= (Ds, s) + (s, Ds) \\ &= ((d\lambda + \theta\lambda)e, \lambda e) + (\lambda e, (d\lambda + \theta\lambda)e) \\ &= h \cdot \bar{\lambda} \cdot d\lambda + h \cdot \lambda \cdot d\bar{\lambda} + h \cdot |\lambda|^2(\theta + \bar{\theta})。\end{aligned}$$

现在,

$$\begin{aligned} d(|s|^2) &= d(\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot h) \\ &= h \cdot \bar{\lambda} \cdot d\lambda + h \cdot \lambda \cdot d\bar{\lambda} + |\lambda|^2 \cdot dh。\end{aligned}$$

所以我们有

$$\theta + \bar{\theta} = \frac{dh}{h},$$

即, $\theta = \partial \log h = \partial \log |e|^2$, 和

$$\begin{aligned} \Theta &= d\theta - \theta \wedge \theta = d\theta \\ &= \bar{\partial}\partial \log |e|^2 \\ &= 2\pi\sqrt{-1} dd^c \log |e|^2。\end{aligned}$$

注意, 这对任意非零全纯截面 e 都成立。

现在, 设 $D = V$ 由局域定义函数 f_α 给出, 并设 s 是 $[D]$ 的整体截面 $\{f_\alpha\}$, 它在 V 上恰好等于零。设

$$D(\varepsilon) = (|s(z)| < \varepsilon) \subset M。$$

对小的 ε, $D(\varepsilon)$ 就是 M 中环绕 V 的管状邻域, 且由 Stokes 定理

$$\begin{aligned} \int_M \Theta \wedge \psi &= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi\sqrt{-1} \int_{M - D(\varepsilon)} dd^c \log |s|^2 \wedge \psi \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{-1}} \right) \int_{\partial D(\varepsilon)} d^c \log |s|^2 \wedge \psi。\end{aligned}$$

在 $U_\alpha \cap D(\varepsilon)$ 中, 写作

$$|s|^2 = |f_\alpha|^2 \cdot h_\alpha = f_\alpha \cdot \bar{f}_\alpha \cdot h_\alpha,$$

其中, $h_\alpha > 0$; 我们有

$$\begin{aligned} d^c \log |s|^2 &= d^c \log(f_\alpha \cdot \bar{f}_\alpha \cdot h_\alpha) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar{\partial} \log \bar{f}_\alpha - \partial \log f_\alpha + (\bar{\partial} - \partial) \log h_\alpha)。\end{aligned}$$

因为 $d^c \log h_\alpha$ 是有界的, 且当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\mathrm{vol}(\partial D(\varepsilon)) \to 0$——就象我们在解析簇的 Stokes 定理的证明中看到的一样, 所以我们推导出:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D(\varepsilon)} d^c \log h_\alpha \wedge \psi = 0。$$

还有, $\bar\partial \log \bar f_\alpha = \overline{\partial \log f_\alpha}$, 且因为 ψ 是实的, 这意味着

$$\int_{\partial D(\varepsilon)} \bar\partial \log \bar f_\alpha \wedge \psi = \overline{\int_{\partial D(\varepsilon)} \partial \log f_\alpha \psi}。$$

因此, 在 U_α 中,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\pi}{\sqrt{-1}} \int_{\partial D(\varepsilon)} d^c \log |s|^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} -\sqrt{-1}\cdot \mathrm{Im} \int_{\partial D(\varepsilon)} \partial \log f_\alpha \wedge \psi。$$

现在, 在任意光滑点 $z_0 \in V\cap U_\alpha$ 的邻域中, 我们可以找到 $w_1 = f_\alpha$ 的一个全纯坐标系。写出 $\psi = \psi(w)dw'\wedge d\bar w' + \varphi$, 其中, $w' = (w_1, \cdots, w_n)$ 和 φ 的所有项或者包含 dw_1, 或者包含 $d\bar w_1$; 那么, 在环绕 z_0 的任意多圆盘中,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D(\varepsilon)\cap\Delta} \partial \log f_\alpha \wedge \psi &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|w_1|=\varepsilon} \frac{dw_1}{w_1} \cdot \psi(w)\cdot dw'\wedge d\bar w' \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \int_{w'} \psi(0, w')\cdot dw'\wedge d\bar w' \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \int_{V\cap\Delta} \psi\end{aligned}$$

且因此,

$$\begin{aligned}\int_M \Theta\wedge\psi &= -\sqrt{-1}\cdot \mathrm{Im}\left(2\pi\sqrt{-1}\int_V \psi\right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\int_V \psi。\end{aligned}$$

证毕

结论: 陈类 $c_1([D])$ *在一方面表示除子* D *携带的基本同调闭链的 Poincaré 对偶; 另一方面在 de Rham 上同调中由线丛* $[D]$ *中任意联络的曲率的* $(\sqrt{-1}/2\pi)$ *倍给出*。它对以后的内容有根本的重要性。这个引理的证明方法, 即把 Stokes 定理应用到有奇异点的微分形式——也是普遍存在的, 并且将在第三章中系统讨论。

这个引理最直接的后果是, *亚纯函数的除子* (f) *同调于零*。这直接可以看清楚: 在 Riemann 球 P^1_λ 上从 $\lambda_0 = \infty$ 到 $\lambda_1 = \infty$ 画一个弧 γ, 那么除子

$$\{(\lambda_0 f + \lambda_1)\}_{[\lambda_0, \lambda_1]\in\gamma}$$

画出一个链, 其边缘为 $(f)_0 - (f)_\infty$。

例子

1. 在 M 是紧致连通 Riemann 曲面的情况下, M 上的除子 D 就是多重度为 n_i 的点 $p_i \in M$ 的有限和

$$D = \sum n_i p_i。$$

D 的次数定义为它的基本类 $(D) \in H_0(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$; 明显地,

$$\deg D = \sum n_i。$$

通过上述引理, 如果 Θ 是线丛 $[D]$ 中联络的曲率形式, 那么

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M \Theta = \langle c_1([D]),[M]\rangle = \deg D。$$

一般地, 我们把 M 上线丛的次数定义为

$$\deg(L) = \langle c_1(L),[M]\rangle,$$

或换句话说, 在由 M 上自然定向给出的同构 $H^2(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 下, $\deg(L) = c_1(L)$。

注意, 由第69(77)页证明的在 Riemann 曲面切丛上度量联络的曲率形式 Θ 和通常的 Guass 曲率 K_M 之间的关系, 经典的 Gauss–Bonnet 定理给出:

$$\deg T'(M) = \frac{1}{4\pi}\int_M K_M \cdot \Phi = \chi(M)。$$

2. 由来自 $\mathbb{P}^n$ 上指数序列的上同调序列

$$H^1(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}) \to H^1(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$$

和 $H^1(\mathbb{P}^n,\mathscr{O})$ 等于零(第一章第七节), 我们得到, $\mathbb{P}^n$ *上的每个线丛都由其陈类确定*, 即,

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}。$$

换句话说, $\mathbb{P}^n$ *上的每个除子都线性等价于一个超平面除子* $H = \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$*的倍数*。伴随于 $\mathbb{P}^n$ 的超平面的丛 $[H]$ 称为*超平面丛*; 它的逆, $J = [H]^* = [-H]$, 称为 $\mathbb{P}^n$ 上的*万有丛*。

我们可以给出 $\mathbb{P}^n$ 上万有丛 J 的如下的直接几何构造。设 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上秩为 $n+1$ 的平庸丛, 所有纤维都恒等于 $\mathbb{C}^{n+1}$。那么, 万有丛就是 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ 的子丛 J, 其在每一点 $Z \in \mathbb{P}^n$ 的纤维是用 Z 表示的 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的直线, 即,

$$J_Z = \{\lambda(Z_0,\cdots,Z_n), \lambda \in \mathbb{C}\}。$$

为了看明白实际上 $J = [-H]$, 考虑 $U_0 = (Z_0 \neq 0) \subset \mathbb{P}^n$ 上由

$$e_0(Z) = \left(1, \frac{Z_1}{Z_0}, \cdots, \frac{Z_n}{Z_0}\right)$$

给出的 J 的截面 e_0。e_0 明显在 U_0 中是全纯和非零的, 并扩张到沿超平面 $(Z_0 = 0) \subset \mathbb{P}^n$ 有阶为 1 的极点的 J 的一个整体亚纯截面。因此, $J = [(e_0)] = [-H]$。

如果 $M \subset \mathbb{P}^n$ 是射影空间的子流形, 那么我们通常到 M 的 $[H] \to \mathbb{P}^n$ 的限制为 M 上的*超平面丛*; 由函子性, 它是伴随于 M 的普通超平面截面 $\mathbb{P}^{n-1} \cap M$ 的线丛。

3. 设 M 是紧致复流形，$V \subset M$ 是光滑解析超曲面。回想我们定义 V 上的法丛 N_V 为商线丛

$$N_V = \frac{T'_M|_V}{T'_V}。$$

我们定义余法丛 N_V^* 为 N_V 的对偶; 它是 $T_M^*|_V$ 的子丛, 由在 $T'_V \subset T'_M|_V$ 上为零的 M 的余切矢量组成。

对光滑超曲面 V 上的余法丛, 有一个简单的公式, 我们现在来推导它: 假设 V 在局域上由函数 $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ 给出; 那么 M 上的线丛 $[V]$ 由转换函数 $\{g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta\}$ 给出。现在, 因为在 $V \cap U_\alpha$ 上 $f_\alpha \equiv 0$, 所以微分 df_α 是 V 的余法丛 N_V^* 的截面; 因为 V 是光滑的, 所以 df_α 处处非零。还有, 在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap V$ 上, 我们有

$$\begin{aligned} df_\alpha &= d(g_{\alpha\beta} f_\beta) \\ &= dg_{\alpha\beta} \cdot f_\beta + g_{\alpha\beta} \cdot df_\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \cdot df_\beta \end{aligned}$$

即, 截面 $df_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}(N_V^*))$ 一起给出 $N_V^* \otimes [V]$ 的一个非零全纯截面。因此, $N_V^* \otimes [V]$ 是平庸线丛; 即

从属公式I

$$N_V^* = [-V]|_V。$$

4. 一般地, 一个最重要的线丛是全纯余切丛的最高次外积

$$K_M = \wedge^n T_M^{*\prime},$$

称为 n维复流形 M 的标准丛。K_M 的全纯截面是全纯 n形式, 即, $\mathscr{O}(K_M) = \Omega_M^n$。

我们将计算射影空间的标准丛 $K_{\mathbb{P}^n}$: 设 $Z_0, \cdots, Z_n$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标, $w_i = Z_i/Z_0$ 是 $U_0 = (Z_0 \neq 0)$ 上的欧氏坐标, 并考虑全纯 n形式

$$\omega = \frac{dw_1}{w_1} \bigwedge \frac{dw_2}{w_2} \bigwedge \cdots \bigwedge \frac{dw_n}{w_n}。$$

ω 明显沿每个超平面 $(Z_i = 0), i = 1, \cdots, n$ 有一个单极点的 U_0 中是非零的。现在, 如果 $w'_i = Z_i/Z_j, i = 0, \cdots, \hat{j}, \cdots, n$ 是 $U_j = (Z_j \neq 0)$ 上的欧氏坐标, 那么,

$$w_i = \frac{w'_i}{w'_0}, \quad i \neq j; \quad w_j = \frac{1}{w'_0},$$

这给出

$$\frac{dw_i}{w_i} = \frac{dw'_i}{w'_i} - \frac{dw'_0}{w'_0}, \quad i \neq j; \quad \frac{dw_j}{w_j} = -\frac{dw'_0}{w'_0},$$

并且因此用 $\{w'_i\}$ 的方式,

$$\omega = (-1)^j \cdot \frac{dw'_0}{w'_0} \bigwedge \cdots \bigwedge \widehat{\frac{dw'_j}{w'_j}} \bigwedge \cdots \frac{dw'_n}{w'_n}。$$

因此, 我们得到, ω 同样沿着超平面 $(Z_0=0)$ 有一个单极点, 且有

$$K_{\mathbb{P}^n}=[(\omega)]=[-(n+1)H]。$$

一般地, 我们可以用 K_M 的方式如下计算流形 M 中光滑解析超曲面的标准丛 K_V。我们有 V 上的一个矢量丛的恰当序列

$$0\to N_V^*\to T_M^*|_V\to T_V^{*\prime}|\to 0。$$

由简单的线性代数得到

$$(\wedge^n T_M^{*\prime})|_V\cong\wedge^{n-1}T_V^{*\prime}\otimes N_V^*,$$

即,

$$K_V=K_M|_V\otimes N_V。$$

将此与从属公式I结合起来, 我们有

从属公式II

$$(*)\qquad K_V=(K_M\otimes[V])|_V。$$

我们给出截面上的对应映射

$$\Omega_M^n(V)\xrightarrow{\text{P.R.}}\Omega_V^{n-1}$$

如下: 把 $\Omega_M^n(V)$ 的截面 ω 看作沿 V 有一个单极点的亚纯 n形式并在其它处是全纯的, 那么我们写出

$$\omega=\frac{g(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}{f(z)},$$

其中, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 是 M 上的局域坐标且 V 由 $f(z)$ 在局域上给出。那么, 在同构 $(*)$ 下, ω 对应于形式 ω' 使得

$$\omega=\frac{df}{f}\bigwedge\omega'。$$

明显地,

$$df=\sum\frac{\partial f}{\partial z_i}\cdot dz_i,$$

且因此任给 i, 我们可以取

$$\omega'=(-1)^{i-1}\frac{g(z)dz_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dz_i}\wedge\cdots\wedge dz_n}{\partial f/\partial z_i}$$

使得 $\partial f/\partial z_i\neq 0$。这个映射

$$\frac{g(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}{f(z)}\longrightarrow(-1)^{i-1}\frac{g(z)dz_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dz_i}\wedge\cdots\wedge dz_n}{\partial f/\partial z_i}|_{f=0}$$

称为*Poincaré* 留数映射, 表为 P.R.。

注意, Poincaré 留数的核直接由 M 上的全纯 n形式组成。于是, 恰当序列

$$0 \to \Omega_M^n \to \Omega_M^n(V) \xrightarrow{\text{P.R.}} \Omega_V^{n-1} \to 0$$

部分给出恰当序列

$$H^0(M, \Omega_M^n(V)) \xrightarrow{\text{P.R.}} H^0(V, \Omega_V^{n-1}) \to H^1(M, \Omega_M^n),$$

即, 如果 $H^1(M, \Omega_M^n) = H^{n,1}(M) = 0$, 那么 Poincaré 留数映射在整体截面上是满射。例如, 因为对 $n > 0$ 有 $H^{n,1}(\mathbb{P}^n) = 0$, 所以, 在 $\mathbb{P}^n$ 的超曲面 V 上最高阶的每个全纯形式是 $\mathbb{P}^n$ 上亚纯形式的 *Poincaré* 留数映射。后面我们将看到, $\mathbb{P}^n$ 上的亚纯 n形式容易描述, 使得我们能够容易地写出 V 上的全纯 $(n-1)$形式。

2. 一些消没定理和推论

Kodaira 消没定理

设 M 是紧致 Kähler 流形。

定义: 线丛 $L \to M$ 是正定的, 如果 L 上存在曲率形式为 Θ 的度量, 使得 $(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta$ 是正定 $(1,1)$形式; L 是负定的, 如果 L^* 是正定的。M 上的除子 D 是正定的, 如果线丛 $[D]$ 是正定的。

线丛的正定性是拓扑性质, 就象我们从下面得到的一样:

命题: 如果 ω 是任意闭的实 $(1,1)$形式, 有

$$[\omega] = c_1(L) \in H^2_{\text{DR}}(M),$$

那么, 有 L 上的一个度量联络, 其曲率形式为 $\Theta = (\sqrt{-1}/2\pi)\omega$。因此, L 是正定的当且仅当它的陈类可以用 $H^2_{\text{DR}}(M)$ 中的一个正定形式来表示。

证明: 设 $|s|^2$ 是 L 上的度量, 曲率形式为 Θ。如果 $\varphi : L_U \to U \times \mathbb{C}$ 是 L 在开集 U 上的平庸化, s 是 U 上 L 的截面且 S_U 是相应的全纯函数, 那么, 对某些正定函数 $h(z)$, 有

$$|s|^2 = h(z) \cdot |s_U|^2。$$

曲率形式和陈类由下列给出:

$$\Theta = -\partial\bar{\partial} \log h(z),$$

$$c_1(L) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right] \in H^2_{\text{DR}}(M)。$$

现在, 设 $|s'|^2$ 是 L 上的另一个度量, 曲率形式为 Θ'。那么, 对某些 M 上的实 C^∞ 函数 ρ, 有 $|s'|^2/|s|^2 = e^\rho$, 从局域公式

$$h'(z) = e^{\rho(z)} h(z)$$

得到,

$$\Theta = \partial\bar{\partial}\rho + \Theta'。$$

特别是,

$$\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right] = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta'\right]。$$

从另一个方向进行证明, 假设 $(\sqrt{-1}/2\pi)\varphi$ 是表示 $H^2_{\mathrm{DR}}(M)$ 中 $c_1(L)$ 的一个闭的实 $(1,1)$形式。我们可以对实 C^∞ 函数 ρ 解方程

$$\Theta = \partial\bar{\partial}\rho + \varphi,$$

那么, L 上的度量 $e^\rho|s|^2$ 将有曲率形式 φ。因此我们的命题将从下面得到:

引理: *如果 η 是紧致 Kähler 流形上的任意 (p,q)形式, 且 η 是 d, ∂ 或 $\bar{\partial}$ 恰当的, 那么, 对某些 $(p-1,q-1)$ 形式 γ,*

$$\eta = \partial\bar{\partial}\gamma。$$

如果 $p=q$ 且 η 是实的, 那么我们也可以取 $\sqrt{-1}\gamma$ 为实的。

证明: 设 G_d 表示伴随于 Laplace 算子 Δ_d 的 Green 算子, 且类似有 G_∂ 和 $G_{\bar{\partial}}$。从第 115 的基本恒等式

$$\frac{1}{2}\Delta_d = \Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$$

首先得到,

$$2G_d = G_\partial = G_{\bar{\partial}},$$

且因此得到所有的算子 d, ∂, $\bar{\partial}$, d^*, ∂^* 和 $\bar{\partial}^*$ 都与 Green 算子可对易。

现在, 因为 η 是 d, ∂ 或 $\bar{\partial}$ 恰当的, 所以在上面的 Laplace 算子作用下其调和投影等于零。由 $\bar{\partial}$ 的 Hodge 分解,

$$\eta = \bar{\partial}\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta。$$

但是 $\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta$ 是纯 $(p,q-1)$ 型, 且因此有

$$\partial(\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta) = \pm\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}(\partial\eta) = 0。$$

因为 ∂ 的调和空间和 $\bar{\partial}$ 的调和空间是一样的, 且因此正交于 $\bar{\partial}^*$ 的空间区域, 所以我们从 ∂ 的 Hodge 分解推出,

$$\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta = \partial\partial^* G_\partial(\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta)。$$

通过交换各种算子, 有

$$\eta = \pm\bar{\partial}\partial(\partial^*\bar{\partial}^* G^2_{\bar{\partial}}\eta),$$

这就得到了引理。 证毕

正定线丛的基本例子是 $\mathbb{P}^n$ 上的超平面丛 $[H]$。回想一下超平面丛的对偶是丛 J, 它在 $Z \in \mathbb{P}^n$ 处的纤维是直线 $\{\lambda Z\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$; 我们可以通过设 $|(Z_0,\cdots,Z_n)|^2 = \sum |Z_i|^2$ 来在 J 上给一个度量。如果 Z 是 J 的任意非零截面——即一个局域提升 $U \subset \mathbb{P}^n \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$——那么, 在 J 中的曲率形式由下列给出:

$$\Theta^* = \bar{\partial}\partial \log \|Z\|^2 = 2\pi\sqrt{-1}dd^c \log \|Z\|^2。$$

于是, 在 $[H]$ 中的对偶度量的曲率形式 Θ 是 $-\Theta^*$, 且得到,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta = dd^c \log \|Z\|^2,$$

即, $(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta$ 就是 $\mathbb{P}^n$ 上 Fubini-Study 度量的相伴 $(1,1)$形式 ω, 我们已经知道它是正定的。作为一个推论, 我们还得到, $[\omega] \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n)$ 是超平面的基本类 (H)。

注意, 到正定形式子流形 $V \subset M$ 的限制也是正定的, 只要 $L \to M$ 是正定的, $L|_V \to V$ 就是正定的。特别是, 在 $\mathbb{P}^n$ 中任意复流形上的超平面丛是正定的。

在本节我们的目的是证明, 伴随于正定线丛 $L \to M$ 的一定的 Čech 上同调群 $H^q(M, \Omega^p(L))$ 等于零。开始前, 我们用前面讨论中熟悉的技术把它转化为包括 $\bar\partial$ 上同调和调和形式的问题。

回想一下, 任给全纯矢量丛 $E \to M$, $\bar\partial$ 算子

$$\bar\partial : A^{p,q}(E) \to A^{p,q+1}(E)$$

定义在整体 C^∞ E-值微分形式中, 且满足 $\bar\partial^2 = 0$。我们用 $Z^{p,q}_{\bar\partial}(E)$ 表示 (p,q)型 $\bar\partial$ 闭的 E-值微分形式的空间, 并且定义 E 的*Dolbealt* 上同调群 $H^{p,q}_{\bar\partial}(E)$ 为

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(E) = \frac{Z^{p,q}_{\bar\partial}(E)}{\bar\partial A^{p,q-1}(E)}。$$

设 $\mathscr{Z}^{p,q}_{\bar\partial}(E)$ 为 $\bar\partial$ 闭的 E-值 (p,q)形式层。恰当序列

$$0 \to \mathscr{Z}^{p,q}_{\bar\partial}(E) \to \mathscr{A}^{p,q}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{Z}^{p,q+1}_{\bar\partial} \to 0$$

给出同构

$$H^i(M, \mathscr{Z}^{p,q+1}_{\bar\partial}(E)) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(M, \mathscr{Z}^{p,q}_{\bar\partial}(E)),$$

这是因为层 $\mathscr{A}^{p,q}(E)$ 允许单位分解且因此没有 Čech 上同调。因此, 重复 de Rham 定理的证明得到:

$$H^q(M, \Omega^q(E)) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(E)。$$

下面我们将讨论全纯矢量丛中的调和理论。假设我们有在 M 和 E 上给定的度量; 那么我们在与 E 或 E^* 张量化的 M 的所有切张量丛上诱导了度量。特别是, 如果 $\{\varphi_i\}$ 是 $T^{*\prime}_M$ 上度量的局域余标架, $\{e_\alpha\}$ 是 E 的酉标架, 那么 $A^{p,q}(E)$ 的任意截面 η 可以局域上写作

$$\eta(z) = \frac{1}{p!q!}\sum_{I,J,\alpha} \eta_{I,J,\alpha}(z)\varphi_I \wedge \bar\varphi_J \otimes e_\alpha;$$

对 $\eta, \psi \in A^{p,q}(E)$,

$$(\eta(z), \psi(z)) = \frac{2^{p+q-n}}{P!q!}\sum_{I,J,\alpha} \eta_{I,J,\alpha}(z) \cdot \overline{\psi_{I,J,\alpha}(z)}。$$

再次, 我们通过设

$$(\eta,\psi)=\int_M(\eta(z),\psi(z))\Phi$$

来定义 $A^{p,q}(E)$ 上的内积, 其中 Φ 是 M 上的体积元。

我们有一个“外积”

$$\wedge: A^{p,q}(E)\otimes A^{p',q'}(E^*)\mapsto A^{p+p',q+q'}(M),$$

它由下式定义:

$$(\eta\otimes s)\wedge(\eta'\otimes s')=\langle s,s'\rangle\cdot\eta\wedge\eta';$$

通过对 $\eta,\psi\in A^{p,q}(E)$ 要求

$$(\eta,\psi)=\int_M\eta\wedge *_E\psi,$$

我们定义一个算子

$$*_E: A^{p,q}(E)\to A^{n-p,n-q}(E^*)。$$

明显地, 如果 $\{e_\alpha\}$ 和 $\{e^*_\alpha\}$ 是 E 和 E^* 的对偶酉标架, 那么, 对 $\eta\in A^{p,q}(E)$ 写出:

$$\begin{aligned}\eta &= \sum\eta_\alpha\otimes e_\alpha,\quad \eta_\alpha\in A^{p,q}(M)\\ *_E\eta &= \sum *\eta_\alpha\otimes e^*_\alpha,\end{aligned}$$

其中, $*$ 是 $A^{p,q}(M)$ 是通常的星算子。

我们取

$$\bar\partial^*: A^{p,q}\to A^{p,q-1}(E)$$

由下式给出:

$$\bar\partial^*=-*_E\cdot\bar\partial\cdot *_E;$$

象以前一样, $\bar\partial^*$ 是 $\bar\partial$ 的自伴算子, 即, 对所有的 $\varphi\in A^{p,q-1}(E)$ 和 $\psi\in A^{p,q}(E)$,

$$(\bar\partial\varphi,\psi)=(\varphi,\bar\partial^*\psi)。$$

最后, 在 E 上的 $\bar\partial$-Laplace 算子由下式定义:

$$\Delta=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial: A^{p,q}(E)\to A^{p,q}(E)。$$

如果 $\Delta\varphi=0$, 那么 E-值形式 φ 称为调和的。(又一次, 调和形式 φ 正好是其 Dolbeault 上同调类 $\varphi+\bar\partial A^{p,q-1}(E)$ 的最小范数的形式。) 我们设

$$\mathscr{H}^{p,q}(E)=\mathrm{Ker}\Delta$$

为调和空间。

现在, 对 M 上通常的微分形式上的 $\bar\partial$-Laplace 算子, Hodge 定理的证明的分析部分在本质上是局域的: 在 L_2-范数中的 $A^{p,q}$ 的完备化中, 我们总可以找到 $\Delta\varphi=0$ 的相应解; 问

题是证明这些解实际上是 C^∞ 的。用 E 的标架的方式写出 E-值形式, 那么在 $A^*(M)$ 的 Hodge 定理的证明中的所有的局域估计都转变到 $A^{p,q}$——唯一的不同是, 在每个估计中, 我们将得到包括 E 上度量以及 T_M^* 上度量的系数函数的更低阶的项, 且它们可以象以前一样被估计出来。因此, Hodge 定理对 E 上的 $\bar\partial$-Laplace 算子成立, 即:

1. $\mathscr{H}^{p,q}(E)$ 是有限维的,

2. 如果 $\mathscr{H}$ 表示正交投影 $A^{p,q}(E) \to \mathscr{H}^{p,q}(E)$, 那么, 存在一个算子

$$G : A^{p,q}(E) \to A^{p,q}(E)$$

使得

$$G(\mathscr{H}^{p,q}(E)) = 0,$$

$$[G, \bar\partial] = [G, \bar\partial^*] = 0,$$

且

$$I = \mathscr{H} + \Delta G。$$

3. 因此, 有一个同构

$$\mathscr{H}^{p,q}(E) \to H_{\bar\partial}^{p,q}(E),$$

而且,

4. $*$ 算子给出一个同构

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(E^*))^*。$$

对 $p = 0$, 这个最后的结果给出

$$H^q(M, \mathscr{O}(E)) \cong H^{n-q}(M, \mathscr{O}(E^* \otimes K_M))^*。$$

这个同构称为*Kodaira-Serre* 对偶。

现在, 如果 M 是有伴随 $(1,1)$-形式 ω 的 Kähler 流形, 那么我们通过对 $\eta \in A^{p,q}(E)$ 和 $s \in A^0(E)$ 的设定

$$L(\eta \otimes s) = \omega \wedge \eta \otimes s$$

来定义算子

$$L : A^{p,q}(E) \to A^{p+1,q+1}(E);$$

设 $\Lambda = L^*$ 是 L 的自伴算子。如果 $D = D' + D''$ $(D'' = \bar\partial)$ 是 E 上的度量联络, 那么我们有基本恒等式:

$$[\Lambda, \bar\partial] = -\frac{\sqrt{-1}}{2} D'^*。$$

这个恒等式来自标量形式 $A^{p,q}(M)$ 上的相似恒等式 $[\Lambda, \bar\partial] = -(\sqrt{-1}/2)\partial^*$, 我们已经证明了它。为了看清楚, 选取 E 的一个局域标架 $\{e_\alpha\}$; 如果 $\theta = \theta' + \theta''$ 是 $\{e_\alpha\}$ 的方式下 D

的联络矩阵, 那么, 对 $\eta \in A^{p,q}(E)$, 我们可以写出,

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_\alpha \eta_\alpha \otimes e_\alpha, \quad \eta_\alpha \in A^{p,q}(M),\\ \bar\partial\eta &= \sum_\alpha \bar\partial\eta_\alpha \otimes e_\alpha + \sum_{\alpha,\beta}(\eta_\alpha \wedge \theta''_{\alpha\beta}) \otimes e_\beta,\\ \Lambda\eta &= \sum_\alpha \Lambda(\eta_\alpha) \otimes e_\alpha,\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}[\Lambda, \bar\partial]\eta &= \sum [\Lambda, \bar\partial]\eta_\alpha \otimes e_\alpha + [\Lambda, \theta'']\eta\\ &= \sum -\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial^*\eta_\alpha \otimes e_\alpha + [\Lambda, \theta'']\eta。\end{aligned}$$

类似地,

$$D'\eta = \sum_\alpha \partial\eta_\alpha \otimes e_\alpha + \sum_{\alpha,\beta}(\eta_\alpha \wedge \theta'_{\alpha\beta}) \otimes e_\beta,$$

即,

$$D'^*\eta = \sum_\alpha \partial^*\eta_\alpha \otimes e_\alpha + \theta'^*\eta。$$

因此差别

$$[\Lambda, \bar\partial] + \frac{\sqrt{-1}}{2}D'^* = [\Lambda, \theta''] + \frac{\sqrt{-1}}{2}\theta'^*$$

是一个内蕴定义的代数算子; 因为我们在每个 $z_0 \in M$ 处可以选择在 z_0 邻域的 E 的一个标架, 使 $\theta(z_0)$ 等于零, 我们得到, $[\Lambda, \bar\partial] + (\sqrt{-1}/2)D'^* = 0$。

我们将利用由调和形式表示的 Čech 上同调来证明我们在矢量丛上同调上的第一个主要结果,

Kodaira-Nakano 消没定理: *如果 $L \to M$ 是正定线丛, 那么*

$$H^q(M, \Omega^p(L)) = 0, \qquad 当 p + q > n。$$

证明*: 由假设, 我们可以得到 L 中的一个度量, 其曲率形式为 Kähler 度量伴随 $(1,1)$形式的 $2\pi/\sqrt{-1}$ 倍; 设 M 上的度量由 $\omega = (\sqrt{-1}/2\pi)\Theta$ 给出。现在, 由调和理论,

$$H^q(M, \Omega^p(L)) \cong \mathscr{H}^{p,q}(L)。$$

为了证明结论, 我们将证明没有次数大于 n 的非零调和 L-值形式。为此, 我们把曲率算子 $\Theta\eta = \Theta \wedge \eta$ 解释为 $(2\pi/\sqrt{-1})L(\eta)$ 或 $D^2\eta$——这里的 D 是 L 的度量联络, 并利用上面的基本恒等式。

*这个证明来自 Y. Akizuki 和 S. Nakano, Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz's theorems, *Proc. Japan Acad.*, Vol. 30(1954).

设 $\eta \in \mathscr{H}^{p,q}(L)$ 是一个调和形式。那么,

$$\Theta = D^2 = \bar{\partial} D' + D' \bar{\partial},$$

所以, 从 $\bar{\partial}\eta = 0$, 有

$$\Theta\eta = \bar{\partial} D' \eta,$$

和

$$\begin{aligned}
2\sqrt{-1}(\Lambda\Theta\eta, \eta) &= 2\sqrt{-1}(\Lambda\bar{\partial} D'\eta, \eta) \\
&= 2\sqrt{-1}\left(\left(\bar{\partial}\Lambda - \frac{\sqrt{-1}}{2} D'^*\right) D'\eta, \eta\right) \\
&= (D'^* D'\eta, \eta) = (D'\eta, D'\eta) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

这是因为 $(\bar{\partial}\Lambda D'\eta, \eta) = (\Lambda D'\eta, \bar{\partial}^*\eta) = 0$。类似地, 有

$$\begin{aligned}
2\sqrt{-1}(\Theta\Lambda\eta, \eta) &= 2\sqrt{-1}(D'\bar{\partial}\Lambda\eta, \eta) \\
&= 2\sqrt{-1}\left(D'\left(\Lambda\bar{\partial} + \frac{\sqrt{-1}}{2} D'^*\right)\eta, \eta\right) \\
&= -(D' D'^*\eta, \eta) = 1(D'^*\eta, D'^*\eta) \leqslant 0。
\end{aligned}$$

结合起来, 有

$$2\sqrt{-1}([\Lambda, \Theta]\eta, \eta) \geqslant 0。$$

但是, $\Theta = (2\pi/\sqrt{-1})L$, 且因此

$$\begin{aligned}
2\sqrt{-1}([\Lambda, \Theta]\eta, \eta) &= 4\pi([\Lambda, L]\eta, \eta) \\
&= 4\pi(n - p - q)\|\eta\|^2 \geqslant 0。
\end{aligned}$$

从而 $p + q > n \Rightarrow \eta = 0$。 证毕

正如我们以前提到的一样, 当我们第一次引入上同调时, 群 $H^q(M, \Omega^p(E))(q \geqslant 1)$ 几乎只作为在整体上解决解析问题而出现——这对出现在 Mittag-Leffler 问题中的 $q = 1$ 特别准确, 但是, 一旦我们承认了 H^1, 那么所有剩下的也都包括进来了。Kodaira 消没定理——与后面讨论的其不变量一起—是截断上同调的最好的一般方法。

与 Kodaira 定理对偶, 我们有

如果 $L \to M$ 是负定线丛, 那么对 $p + q < n$ 有 $H^q(M, \Omega^p(L)) = 0$。

当 $p = q = 0$ 的特殊情形可以通过如下初等方法来证明: 我们必须证明的是, 如果 $L \to M$ 有一个度量且其曲率为一个负定 $(1,1)$ 形式的 $2/\sqrt{-1}$ 倍, 那么

$$(*) \qquad H^0(M, \mathscr{O}(L)) = 0。$$

假定 $s \neq 0 \in H^0(M, \mathscr{O}(L))$, 且 $x_0 \in M$ 是 $|s|^2$ 达到最大值的一个点。由假设, 如果我们设 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, 那么曲率形式的系数矩阵

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\log\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right) &= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\right)\right.\\ &\quad \left.+\sqrt{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} - \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_i}\right)\right)\left(\log\frac{1}{|s|^2}\right)\end{aligned}$$

是负定厄米的, 并且特别是, 实对称矩阵

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\right)\log\frac{1}{|s|^2}$$

是负定的。但是, $\log(1/|s|^2)$ 在 x_0 达到最小值, 且由最大值原理, 矩阵

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)\log\frac{1}{|s|^2} \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\right)\log\frac{1}{|s|^2}$$

都必须是半正定的, 这就产生了矛盾。

如果 M 是 Riemann 曲面, 那么特殊情形 $(*)$ 就是一般情形, 因为 $p + q < 1 \Rightarrow p = q = 0$。于是定理甚至更初等: 如果 Θ 是 L 的曲率形式, 且 $(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta$ 是负定的, 那么有

$$c_1(L) = \int_M \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta < 0。$$

但是, 如果 $s \neq 0 \in H^0(M, \mathscr{O}(L))$, 那么 L 是伴随于有效除子 $D = (s)$ 的线丛, 而且有

$$c_1(L) = \deg D \geqslant 0,$$

产生矛盾。

作为消没定理的直接结果, 我们得到,

$$H^q(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(kH)) = 0 \quad \text{当对所有} k, 1 \leqslant q \leqslant n-1。$$

如果 k 是负定的, 那么它直接从消没定理的对偶得到; 如果 k 是非负的, 由原来的定理得到

$$\begin{aligned}H^q(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(kH)) &= H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n}(kH - K_{\mathbb{P}^n}))\\ &= H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^n_{\mathbb{P}^n}((k+n+1)H))\\ &= 0。\end{aligned}$$

超平面截面上的 Lefschetz 定理

利用 Kodaira 消没定理, 我们可以给出著名的 Lefschetz 定理的证明, 这个定理显示了射影簇同调及其超平面截面的同调之间的关系。

设 M 是一个 n 维紧致复流形, $V \subset M$ 是一个光滑超曲面, 且 $L = [V]$ 是正定的——即, $M \subset \mathbb{P}^N$ 是射影空间的子流形且 $V = M \cap H$ 是 M 的超平面截面。那么, 我们有
Lefschetz 超平面定理: 由包含 $i : V \hookrightarrow M$ 诱导的映射

$$H^q(M, \mathbb{Q}) \to H^q(V, \mathbb{Q}),$$

对 $q \leqslant n-2$ 是同构, 对 $q = n-1$ 是单射。
证明: 在 $\mathbb{C}$ 上证明结果就可以了。由 Hodge 分解得到

$$H^r(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M),$$

和由 Dolbealt 定理得到

$$H^{p,q}(M) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \cong H^q(M, \Omega^p_M)。$$

这个结果对 V 也同样正确, 所以只需要证明: 映射

$$H^p(M, \Omega^q_M) \to H^p(V, \Omega^q_V)$$

对 $p + q \leqslant n-2$ 是同构, 对 $p + q = n-1$ 是单射。

因此, 我们用

$$\Omega^p_M \xrightarrow{r} \Omega^p_M|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V$$

来把限制映射 $\Omega^p_M \to \Omega^p_V$ 分解为因子, 其中, $\Omega^p_M|_V$ 是 $(\wedge^p T^{*\prime}_M)|_V$ 的截面层——将其或者看作 V 上的层, 或者通过扩张看作 M 上的层——r 是限制映射, i 是自然投影 $(\wedge^p T^{*\prime}_M)|_V \to \wedge^p T^{*\prime}_V$ 诱导的拖回映射。

限制映射 r 的核明显就是沿着 V 等于零的 M 上全纯 p-形式层, 所以, 我们得到 M 上层的一个恰当序列

$$(*) \qquad 0 \to \Omega^p_M(-V) \to \Omega^p_M \xrightarrow{r} \Omega^p_M|_V \to 0。$$

我们同样可以把映射 i 对应到一个恰当序列中: 对 $p \in V$, 序列

$$0 \to N^*_{V,p} \to T^{*\prime}_p \to T^{*\prime}_p(V) \to 0$$

通过线性代数计算得

$$0 \to N^*_{V,p} \otimes \wedge^{p-1} T^{*\prime}_p(V) \to \wedge^p T^{*\prime}_p(M) \to \wedge^p T^{*\prime}_p(V) \to 0,$$

而且最后得到 V 上层的恰当序列

$$0 \to \Omega^{p-1}_V(N^*_V) \to \Omega^p_M|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V \to 0。$$

但是由从属公式I, $N_V^* = [-V]|_V$; 因此我们可以把这个最后的结果写作

$$(**) \qquad 0 \to \Omega_V^{p-1}(-V) \to \Omega_M^p|_V \to \Omega_V^p \to 0。$$

现在, $[-V]$ 在 M 上是负定的, 且同样 $[-V]|_V$ 在 V 上也是负定的。Kodaira 消没定理因此给出

$$\begin{aligned} H^q(M, \Omega_M^p(-V)) &= 0, \quad p+q<n, \\ H^q(V, \Omega_V^{p-1}(-V)) &= 0, \quad p+q<n \end{aligned}$$

由伴随层序列 $(*)$ 和 $(**)$ 的恰当上同调序列, 回想一下 $H^*(M, \Omega_M^p|_V) = H^*(V, \Omega_M^p|_V)$, 对 $p+q \leqslant n-2$得到

$$H^q(M, \Omega_M^p) \overset{r^*}{\cong} H^q(M, \Omega_M^p|_V) \overset{i^*}{\cong} H^q(V, \Omega_V^p),$$

对 $p+q=n-1$, 所有的映射的单射。 证毕

当然, 超平面截面上的 Lefschetz 定理是纯拓扑的。有一个利用了点 Morse 理论的另一个证明, 在这里我们将给出概述:*

首先, 假设 A 是紧致流形, $B \subset A$ 是光滑子流形, $\varphi : A \to \mathbb{R}^+$ 为 C^∞ 函数, 满足 $\varphi^{-1}(0) = B$。φ 的临界点 $x \in A$ 是满足 $d\varphi(x_\nu) = 0$ 的点; $\varphi(x_\nu)$ 称为 φ 的临界值。在每一个临界点, *Hesse* 矩阵 $\partial^2\varphi/(\partial u_i \partial u_j) = H(\varphi)$ 是切空间 $T_{x_\nu}(A)$ 中有明确定义的二次形式; 如果 $H(\varphi)$ 是非奇异的, 那么临界点是非退化的。如果 φ 的所有临界点是非退化的, 那么函数 φ 称为 Morse 函数; 按照标准的逼近定理, 这样的函数在 C^2 拓扑上的稠密的。由 Morse 理论的主要引理, 如果 φ 是 Morse 函数, 且 Hesse 矩阵 $H(\varphi)$ 在 A 中对 B 的法丛上是非奇异的, 那么, 只要 t 不经过临界值,

$$A_t = \{x \in A : \varphi(x) \leqslant t\}$$

的同伦型就是一样的(这是明显的, 我们只沿着 φ 的梯度矢量场收缩), 当 t 经过一个临界值, 且临界值的 Hesse 矩阵恰好有 k 个负本征值时, 它变成附上了一个维数为 k 的格子。(这要求临界点 x_ν 周围 Morse 函数 φ 的局域分析, 是主要步骤。)

现在, 设 M 是紧致复流形, $L \to M$ 是正定全纯线丛, $s \in H^0(M, \mathscr{O}(L))$ 是全纯截面, 其零点除子 $V = (s)$ 是光滑超曲面。选择 $L \to M$ 的一个定理, 使得 $(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta = (\sqrt{-1}/2\pi)\partial\bar{\partial}\log|s|^{-2}$ 是正的, 并且设

$$\varphi(x) = \log|s|^2。$$

φ——或者 C^2 拓扑中 φ 附近的一个函数——可以用作 Morse 函数(实际上, $\varphi^{-1}(-\infty) = V$ 的 $\varphi : M \to [-\infty, \infty)$ 没有根本性的困难; 重要的是沿着 V 有 $d(|s|) \neq 0$)。现在, 对 φ 的任意临界点 $x \in M$, 矩阵

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\log\frac{1}{|s|^2} = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\right) + \frac{\sqrt{-1}}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} - \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_i}\right)\right)\log\frac{1}{|s|^2}$$

*来自R. Bott, On a theorem of Lefschetz, *Mich. Math. J.*, Vol. 6(1959), pp.211–216。

是负定厄米的, 且得到 φ 的 Hesse 矩阵

$$H(\varphi)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}\\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_j\partial y_i} & \dfrac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\end{pmatrix}\log|s|^2$$

至少有 n 个负本征值。明显地, 这对充分接近 C^2 拓扑中 φ 的函数 ψ 也正确。因此, 由 Morse 理论, 至于同伦型, M 由附上维数至少为 n 的格子而从 V 得到, 并且, 这给出了同伦水平和 $\mathbb{Z}$ 系数同调的 Lefschetz 定理。 证毕

当 $n=1$ 时, 定理没有告诉什么。然而, 当 $n=2$ 时——即, M 是一个(紧致的连通)复曲面——且 $V\subset M$ 是作为正定除子嵌入的一个 Riemann 流形, 那么, Lefschetz 定理给出

$$\begin{aligned}H_0(V,\mathbb{Z}) &\cong H_0(M,\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\\ H_1(V,\mathbb{Z}) &\to H_1(M,\mathbb{Z})\to 0,\end{aligned}$$

即, 4维流形的所有第一同调都在不可约嵌入的 Riemann 流形上。

我们也可以把它应用到射影空间的超曲面: 因为 $\mathbb{P}^n$ 上的任何有效非零除子是正定的, 定理告诉我们, 如果 V 是 $\mathbb{P}^n$ 上任意光滑超曲面, 那么对 $k\neq n/2$, 有 $H^{2k-1}(V)=0$, 同时, 对 $k<n/2$, $H^{2k}(V)$ 由 V 上 k 维平面的截面的类生成。特别是, 维数为 2 或更高的任意光滑超曲面是连通的和单连通的。对 k 的适当区间, 同样的结果可应用到作为超曲面横截相交而给出的射影空间的任意子流形。

关于 Lefschetz 定理最后的讨论: 在可能的范围内, Lefschetz 的方法可在归纳上研究代数簇 M 的拓扑, 把关于 M 的同调的问题化简到关于更低维数的簇的问题。他的最后一个定理的原始证明说, 对 M 的超平面截面 V, 映射 $H_q(V,\mathbb{Z})\to H_q(M,\mathbb{Z})$ 对 $q<n-1$ 是同构, 对 $n-1$维是满射。由强 Lefschetz 定理, 维数超过 n 的 M 的同调被反映在维数小于 n 的情况, 并且, 由 Lefschetz 分解, 维数在 n 中的任意非本原闭链可以由维数大于 n 的闭链与超平面相交而得到。因此, Lefschetz 定理合起来得到, 在每个维数中簇中的唯一“新”有理同调是中间维数的本原同调。

定理 B

我们的全纯矢量丛上同调的第二个消没定理没有 Kodaira 消没定理精确, 但是应用范围更广:

定理 B: *设 M 是紧致复流形, $L\to M$ 是正定线丛。那么, 任给全纯矢量丛 E, 存在 μ, 使得*

$$H^q(M,\mathscr{O}(L^\mu\otimes E))=0 \qquad \text{当}q>0,\mu\geqslant\mu_0\text{。}$$

证明: 在我们证明之前, 注意到如果 E 是线丛, 那么结论已经包含在 Kodaira 定理中: 就是取 μ_0, 使得当 $\mu\geqslant\mu_0$ 时 $L^\mu\otimes E\otimes K_M^*$ 的正定的; 那么, 因为 $c_1(L^\mu\otimes E)=\mu c_1(L)+c_1(E)$, 那么, 对 $q>0,\mu\geqslant\mu_0$有

$$H^q(M,\mathscr{O}(L^\mu\otimes E))=H^q(M,\Omega^N(L^\mu\otimes E\otimes K_M^*))=0\text{。}$$

的确, 定理 B 的证明本质上与 Kodaira 的定理是一样的, 唯一的差别是现在我们必须对一般矢量丛上的曲率算子增加一个确定的正负号。

首先, 由 Kodaira-Serre 对偶, 得到

$$H^q(M,\mathscr{O}(L^\mu\otimes E))\cong H^{n-q}(M,\mathscr{O}(L^{-\mu}\otimes E^*\otimes K_M)),$$

所以, 任给 E, 只需要证明存在 μ_0, 使得当 $\mu\geqslant\mu_0, p<n$ 时有

$$H^{0,p}_{\bar\partial}(M,L^{-\mu}\otimes E)\cong H^p(M,\mathscr{O}(L^{-\mu}\otimes E))=0。$$

选择 L 中的一个度量, 使得 $\omega=(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta_L$ 是正定的, 其中, Θ_L 是伴随于度量的曲率形式; 设 M 上的度量是由 ω 给出的。现在, 我们已经得到, 如果 E,E' 是两个 Hermite 矢量丛且如果我们给予 $E\otimes E'$ 以诱导度量, 那么,

$$D_{E\otimes E'}=D_E\otimes 1+1\otimes_{E'}$$

且因此

$$\Theta_{E\otimes E'}=\Theta_E\otimes 1+1\otimes\Theta'_E,$$

其中, D,Θ 总是指度量联络和曲率。特别是, 对应 E 上有度量的任意 L 和 E,

$$\Theta_{L^\mu\otimes E}=\frac{2\pi\mu}{\sqrt{-1}}\omega\otimes 1_E+\Theta_E。$$

设 $\eta\in\mathscr{H}^{0,p}(L^{-\mu}\otimes E)$ 是调和的。把 $\Theta_{L^{-\mu}\otimes E}$ 写作 Θ, 把 $D_{L^{-\mu}\otimes E}$ 写作 D, 我们得到,

$$\Theta=D^2=D'\bar\partial+\bar\partial D',$$

所以,

$$\Theta\eta=\bar\partial D'\eta,$$

且由 Kähler 恒等式

$$[\Lambda,\bar\partial]=-\frac{\sqrt{-1}}{2}D'^*,$$

我们得到,

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}(\Lambda\Theta\eta,\eta,\eta)&=2\sqrt{-1}(\Lambda\bar\partial D'\eta,\eta)\\&=2\sqrt{-1}\left(\left(\bar\partial\Lambda+\frac{1}{2\sqrt{-1}}D'^*\right)\eta,\eta\right)\\&=(D'^*D'\eta,\eta)=(D'\eta,D'\eta)\geqslant 0,\end{aligned}$$

这是因为 $(\bar\partial\Lambda D'\eta,\eta)=(\Lambda D'\eta,\bar\partial^*\eta)=0$。另一方面,

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}(\Theta\Lambda\eta,\eta)&=2\sqrt{-1}(D'\bar\partial\Lambda\eta,\eta)\\&=2\sqrt{-1}\left(\left(\Lambda\bar\partial-\frac{1}{2\sqrt{-1}}D'^*\right)\eta,D'^*\eta\right)\\&=-(D'^*\eta,D'^*\eta)\leqslant 0。\end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$2\sqrt{-1}([\Lambda,\Theta]\eta,\eta)\geqslant 0。$$

但是现在,

$$\Theta=\Theta_{L_{-\mu}\otimes E}=\Theta_E-\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\mu\omega,$$

且因此

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}([\Lambda,\Theta]\eta,\eta) &= 2\sqrt{-1}([\Lambda,\Theta_E]\eta,\eta)-4\pi\mu([\Lambda,L]\eta,\eta)\\ &= 2\sqrt{-1}([\Lambda,\Theta_E]\eta,\eta)-4\pi\mu(n-p)\|\eta\|^2。\end{aligned}$$

现在, $[\Lambda,\Theta_E]$ 在 $A^{0,*}(L^{-\mu}\otimes E)$ 上是有界的, 因此我们写出

$$|([\Lambda,\Theta_E]\eta,\eta)|\leqslant C\|\eta\|^2,$$

且最后当 $p<n$ 时, 有

$$\mu>\frac{C}{2\pi}\Rightarrow\eta=0,$$

即,

$$\mathscr{H}^{0,p}(L^{-\mu}\otimes E)=0\quad 当\ \mu>\frac{C}{2\pi},\quad p<n。$$

证毕

$(1,1)$ **类上的 Lefschetz 定理**

作为定理 B 的一个应用, 在射影空间的复子流形上, 我们将完成除子, 线丛和陈类之间相对应的论述。首先, 我们有

命题: *设 $M\subset\mathbb{P}^N$ 是一个子流形。那么, 对某些除子 D, M 上的每个线丛有形式 $L=[D]$; 即,*

$$\mathrm{Pic}(M)\cong\frac{\mathrm{Div}(M)}{线性等价类}。$$

证明: 为了证明它, 我们必须证明 M 上的每个线丛有一个整体亚纯截面。为了找到这样的亚纯截面, 设 H 表示限制到 M 的 $\mathbb{P}^N$ 上的超平面丛。我们将证明, 对 $\mu\gg0$, $L+\mu H$ 有非平庸的整体全纯截面 s; 那么, 如果 t 是 M 上 $[H]$ 的任意整体全纯截面, 那么, s/t^μ 将是所希望的 L 的整体亚纯截面。

我们在 $n=\dim M$ 上使用归纳法: 假设对每个维数小于 n 的子流形 $V\subset\mathbb{P}^N$ 和每个线丛 $L\to V$, 当 $\mu\gg0$ 时有 $H^0(V,\mathscr{O}(L+\mu H)\neq0$。由 Bertini 的定理, 我们可以找到一个超平面 $\mathbb{P}^{N-1}\subset\mathbb{P}^N$ 且 $V=\mathbb{P}^{N-1}\cap M$ 是光滑的; 我们考虑恰当层序列

$$0\to\mathscr{O}_M(L+(\mu-1)H)\xrightarrow{\otimes s}\mathscr{O}_M(L+\mu H)\xrightarrow{r}\mathscr{O}_V(L+\mu H)\to0,$$

其中, s 是在 H 上正好等于零的 H 的截面, r 是限制映射。当 $\mu\gg0$ 时, 通过归纳法我们有

$$H^0(V,\mathscr{O}(L+\mu H))\neq0$$

和

$$H^0(M, \mathscr{O}(L+\mu H)) \to H^0(V, \mathscr{O}(L+\mu H)) \to 0,$$

这是因为从定理 B, 有

$$H^1(M, \mathscr{O}(L+(\mu-1)H)) = 0。$$

因此, $H^0(M, \mathscr{O}(L+\mu H)) \neq 0$, 并且结果得到证明。 证毕

我们现在考虑一下解析闭链的一般性质。在复 Kähler 流形 M 上, 复上同调上的 Hodge 分解

$$H^n(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(M)$$

给出实上同调

$$H^n(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p\leqslant q}} (H^{p,q}(M) \otimes H^{q,p}(M)) \cap H^n(M, \mathbb{R})$$

的粗略分解。自然要问, 我们是否可以在几何上表征 Poincaré 对偶于某个这些因子类的同调类。例如, 我们称一个同调类 $\gamma \in H_{2p}(M, \mathbb{Z})$ 是解析的, 如果它是 M 的解析子簇基本类的有理线性组合; 对偶地, 我们称一个上同调类是解析的, 如果其 Poincaré 对偶是解析的。现在, 我们已经知道, 由于纯局域的原因, 如果 $V \subset M$ 是维数为 p 的解析子簇, 且 ψ 是 M 上的任意微分形式, 那么,

$$\int_V \psi = \int_V \psi^{n-p,n-p}。$$

因此, 如果 η 是表示上同调类 η_V 的 M 上的调和形式, 且 ψ 是任意调和形式, 那么,

$$\int_M \psi \wedge \eta = \int_V \psi = \int_V \psi^{n-p,n-p} = \int_M \psi \wedge \eta^{p,p},$$

即, $\eta = \eta^{p,p}$, 并且因此我们得到, 阶次为 $2p$ 的任意解析上同调类是纯 (p,p) 型的。著名的 *Hodge* 猜测断言, 其逆也是正确的: 在射影空间的子流形 $M \subset \mathbb{P}^N$ 上, (p,p) 型的每个有理上同调类都是解析的。Hodge 猜测目前是否正确还不知道; 这是一个非常美妙和困难的问题。一般地, 已经被证明的唯一情形是 $p=1$ 的情形; 即

(1,1)类上的 Lefschetz 定理: *对子流形 $M \subset \mathbb{P}^N$, 每个上同调类*

$$\gamma \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

是解析的; 实际上, 对某些 M 上的除子 D, 有

$$\gamma = \eta_D。$$

当然, 在这里对它在 $H^2(M, \mathbb{R})$ 中的自然包含下的像, 我们写作 $H^2(M, \mathbb{Z})$。

证明: 再次考虑恰当序列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}^* \to 0$$

和伴随上同调序列

$$H^1(M,\mathscr{O}^*)\xrightarrow{c_1}H^2(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{i_*}H^2(M,\mathscr{O})\cong H^{0,2}(M)。$$

我们声明, 映射 i_* 通过下列方法给出: 首先是映射 $H^2(M,\mathbb{Z})\to H^2(M,\mathbb{C})$, 接着是在 Hodge 分解中的 $H^2(M,\mathbb{C})$ 的 $(0,2)$因子上的投影; 即, 下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} H^2(M,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H^2(M,\mathscr{O}) \\ \downarrow & & \\ H^2(M,\mathbb{C}) & & \wr\Big\downarrow\text{Dolbeault} \\ \text{de Rham}\downarrow\wr & & \\ H^2_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi^{0,2}} & H^{0,2}_{\bar\partial}(M). \end{array}$$

(映射 $\pi^{0,2}$ 定义在形式的水平上, 因为对 $\omega=\omega^{2,0}+\omega^{1,1}+\omega^{0,2}\in Z^2_d(M)$, $\bar\partial\omega^{0,2}=(d\omega)^{0,3}=0$)。为了看清楚, 设 $z=(z_{\alpha\beta\gamma})\in Z^2(M,\mathbb{Z})$; 为了得到在 de Rham 同构下 z 的像, 我们取 $f_{\alpha\beta}\in A^0(U_\alpha\cap U_\beta)$ 使得

$$z_{\alpha\beta\gamma}=f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}-f_{\alpha\gamma}\quad 在U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma中;$$

因为 $z_{\alpha\beta\gamma}$ 是常数, $df_{\alpha\beta}+df_{\beta\gamma}-df_{\alpha\gamma}=0$, 所以, $(df_{\alpha\beta})\in Z^1(M,\mathscr{Z}^1_k)$, 且我们找到了 $\omega_\alpha\in A^1(U_\alpha)$ 使得

$$df_{\alpha\beta}=\omega_\beta-\omega_\alpha\quad 在U_\alpha\cap U_\beta中。$$

于是, 整体 2形式 $d\omega_\alpha=d\omega_\beta$ 表示 $H^2_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{C})$ 中 z 的像。另一方面, 取在 Dolbealt 同构下 i_*z 的像: 我们写作

$$\begin{aligned} z_{\alpha\beta\gamma} &= f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}-f_{\alpha\gamma}, \\ \bar\partial f_{\alpha\beta} &= \omega^{0,1}_\beta-\omega^{0,1}_\alpha, \end{aligned}$$

而且我们得到, $\bar\partial\omega^{0,1}_\alpha=(d\omega_\alpha)^{0,2}$ 在 $H^{0,2}_{\bar\partial}(M)$ 中表示 z。

现在, 我们就要完成了: 给定 $\gamma\in H^{1,1}(M)\cap H^*(M,\mathbb{Z})$, 我们有 $i_*(\gamma)=0$, 且因此 $\gamma=c_1(L)$ 是某些线丛 $L\in H^1(M,\mathscr{O}^*)$ 的陈类。对某些除子 $D=\sum n_iV_i$ 写作 $L=[D]$, 得到

$$\gamma=c_1([L])=\eta_D。$$

证毕

注意, 因为强 Lefschetz 定理的同构

$$L^{n-1}:H^1(M,\mathbb{Q})\to H^{n-1,n-1}(M,\mathbb{Q})$$

由与 $n-1$ 维超平面的相交而给出, 所以它把解析类变成解析类; 因此, Lefschetz 定理也暗含了 $H^{2n-2}(M,\mathbb{Q})\cap H^{n-1,n-1}(M)$ 的 Hodge 猜测。特别是, 我们得到, 射影空间子流形上的除子和曲线之间的交集配对是非退化的。

3. 代数簇

解析簇和代数簇

设 $X_0, \cdots, X_n$ 表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的欧氏坐标, 也表示 $\mathbb{P}^n$ 上相应的齐次坐标。回想一下, 万有丛 $J \to \mathbb{P}^n$ 是平庸丛 $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ 的子丛, 其在点 $X \in \mathbb{P}^n$ 上的纤维简单地是对应于 X 的直线 $\{\lambda X\}_\lambda \subset \mathbb{C}^{n+1}$。超平面丛 $H \to \mathbb{P}^n$ 是 J 的对偶, 即, 它是这样的丛, 其在 $X \in \mathbb{P}^n$ 上的纤维对应于直线 $\{\lambda X\}$ 上的线性泛函空间。就象我们在本章第一节所得到的, H 的陈类是 $\mathbb{P}^n$ 中超平面的基本类 ω——即, $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ 的生成元——并且从 $H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}) = 0$ 得到, $\mathbb{P}^n$ 上每个线丛是 H 的一个倍数 H^d。

现在, 考虑丛 H 的整体截面。首先, 我们注意到, 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的任意线性泛函 L 通过限制而诱导 H 上的一个截面 σ_L, 即, 通过设

$$\sigma_L(X) = L|_{\{\lambda X\}},$$

明显地, 只要 L 等于零, σ_L 就恒等于零, 因此我们有单射

$$\mathbb{C}^{n+1*} \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H))。$$

实际上, 所有的 $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H))$ 用这种方法得到: 如果 σ 是 H 的任意截面, $D = (\sigma)$ 是它的零除子, 那么, 基本类 η_D 由下式给出:

$$\eta_D = c_1(H) = \omega,$$

并且由第一章第四节, 得到 D 是 $\mathbb{P}^n$ 的超平面。如果我们设 $L \in \mathbb{C}^{n+1*}$ 是超平面 $\pi^{-1}D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 上等于零的任意线性泛函, 那么, 亚纯函数 σ/σ_L 将在所有的 $\mathbb{P}^n$ 上是全纯的, 因此是常数。

一般地, 点 X 上 H 的幂 H^d 的纤维对应于直线 $\{\lambda X\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 上的 d 次线性形式的空间, 并且因此象以前一样, $\mathbb{C}^n$ 上的任意 d 次线性形式 F 通过限制诱导了 H^d 的一个整体截面

$$\sigma_F(X) = F|_{\{\lambda X\}}。$$

因为我们每次都把 F 限制到一个直线上, 我们得到, 如果 F 在任意两个因子中可任选, 那么 $\sigma_F = 0$, 并且因此我们有从 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的对称 d 线性形式的空间——即在 $X_0, \cdots, X_n$ 中次数为 d 的齐次多项式 $F(X_0, \cdots, X_n)$——到 H^d 的整体截面空间的映射:

$$\mathrm{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+1^*}) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H^d))。$$

再次, 映射是单射, 并且截面 σ_F 的零除子就是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中在 $F(X_0, \cdots, X_n)$ 的零轨迹的 $\mathbb{P}^n$ 中的像。

我们现在声明, 这些都是 H^d 的整体截面。为了证明它, 设 σ 是 H^d 的任意整体截面, 并且用 σ_F 来表示对应于任意齐次多项式 $F(X_0, \cdots, X_n)$ 的 H^d 的截面。那么商 σ/σ_F 是 $\mathbb{P}^n$ 上的亚纯函数; 设,

$$G' = \pi^* \left(\frac{\sigma}{\sigma_F} \right)$$

为到 $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 的拖回。G' 沿着 $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 中除子 $F=0$ 有一个单极点, 并且在其它处是全纯的, 因此, 函数

$$G=G'\cdot F$$

在 $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 中处处全纯, 并且因此通过 *Hartoges* 的定理扩展到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的一个整全纯函数。现在, 因为对所有 $X\in\mathbb{C}^{n+1}$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有 $G'(\lambda X)=G'(X)$ 且 $F(\lambda X)=\lambda^d F(X)$, 那么,

$$G(\lambda X)=\lambda^d G(X),$$

即, G 是 d 次齐次的。因此, 如果 $\iota:t\to(\mu_0 t,\cdots,\mu_n t)$ 是通过 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的原点的任意直线, 那么拖回 ι^*G 或者恒等于零, 或者在 $t=0$ 有次数为 d 的零点和在 $t=\infty$ 有次数为 d 的极点, 即, 对某些 μ,

$$\iota^*G=\mu\cdot t^d。$$

从而, G 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的原点周围的幂级数展开

$$G(X_0,\cdots,X_n)=\sum a_{i_0,\cdots,i_n}X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}$$

没有次数不等于 d 的项, 即, G 在 $X_0,\cdots,X_n$ 中是次数为 d 的齐次多项式。因此, $\sigma=\sigma_G$ 是所期望的形式, 并且我们已经证明, H^d 的每个整体截面由 $X_0,\cdots,X_n$ 中的齐次多项式所给出。

我们顺便注意到, 对 H^d 的整体截面空间的维数 $h^0(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}(H^d))$, 即, $(n+1)$ 个变量中次数为 d 的单项式 $X_0^{i_0},\cdots,X_n^{i_n}$ 的数目, 有一个有用的公式。我们把 n 个整数的集合

$$\{i_0+1,i_0+i_1+2,\cdots,i_0+\cdots+i_{n-1}+n\}\subset\{1,\cdots,d+n\}$$

结合到 $\sum i_k=d$ 的任意整数序列 $i_0,\cdots,i_n$。这个 $\{1,\cdots,d+n\}$ 的子集确定了 i_k 的序列, 并且相反地, 在 1 和 $d+n$ 之间 n 个不同数的任意子集对应于这样一个序列。因此, 在 $X_0,\cdots,X_n$ 中次数为 d 的单项式的数目就是在阶次为 $d+n$ 的集合中阶次为 n 的子集的数目 $\begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix}$, 且因而有

$$h^0(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}(H^d))=\begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix}。$$

注意, 齐次坐标 X_i 中次数为 d 的齐次多项式 $F(X_0,\cdots,X_n)$ 也可以使用 $(X_0\neq 0)$ 的欧氏坐标 $x_i=X_i/X_0, i=1,\cdots,n$ 用次数 $\leqslant d$ 的非齐次多项式来给出:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=F(1,x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{X_0^d}F(X_0,\cdots,X_n),$$

而且, 相反地, 任意多项式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum a_{i_1,\cdots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

对应于一个齐次多项式

$$F(X_0,\cdots,X_n)=\sum a_{i_1,\cdots,i_n}X_0^{d-\sum i_k}\cdot X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}。$$

f 称为 F 的仿射或非齐次形式。

我们现在给出

定义: 代数簇 $V\subset\mathbb{P}^n$ 是一组齐次多项式 $\{F_\alpha(X_0,\cdots,X_n)\}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的轨迹。

代数簇明显地是 $\mathbb{P}^n$ 中的解析簇, 并且将同样优先地来讨论(即, 代数簇 $V\subset\mathbb{P}^n$ 称为光滑的, 不可约的, 连通的等, 如果作为 $\mathbb{P}^n$ 中的解析簇它有这些性质)。相反地, 我们将证明, 射影空间的任意解析簇可以表示为齐次多项式的轨迹。我们已经在本质上对超曲面这样做了: 如果 $V\subset\mathbb{P}^n$ 是任意除子, 那么线丛 $[V]$ 对某些 d 有 H^d 的形式, 且 V 是 $[V]$ 的某些截面 σ 的零点轨迹。但是, H^d 的所有截面 σ 有 σ_F 的形式, 并且因此

$$V=(\sigma_F)=(F(X_0,\cdots,X_n)=0)$$

是代数的。一般地, 假设 $V\subset\mathbb{P}^n$ 是 k 维簇, $p\in\mathbb{P}^n$ 是不位于 V 上的任意点。我们可以在 $\mathbb{P}^n$ 中找到一个 $(n-k-1)$ 维平面 $\mathbb{P}^{n-k-1}$, 它经过 p 而不经过 V; 假设 $\mathbb{P}^{n-k-2}$ 是 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 中的一个 $(n-k-2)$ 维平面, 与 p 不相交。设 π 表示从 $\mathbb{P}^{n-k-2}$ 到 $(k+1)$ 维余平面 $\mathbb{P}^{k+1}$ 上的投影; 选择 $\mathbb{P}^n$ 上的坐标 $X_0,\cdots,X_n$ 使得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{k+1}&=(X_{k+2}=\cdots=X_n=0)\\ \mathbb{P}^{n-k-2}&=(X_0=\cdots=X_{k+1}=0)\end{aligned}$$

并且,

$$\pi([X_0,\cdots,X_n])=[X_0,\cdots,X_{k+1}]。$$

由真映射定理, $\mathbb{P}^{k+1}$ 中 V 的像 $\pi(V)$ 是 $\mathbb{P}^{k+1}$ 中的解析超曲面, 并且由 $\mathbb{P}^{n-k-1}=\overline{\mathbb{P}^{n-k-2},p}$ 不经过 V 的假设, 得到 $\pi(p)$ 处在 $\pi(V)$ 之外。从我们所得到的, 我们可以找到一个齐次多项式 $F(X_0,\cdots,X_{k+1})$, 它在 $\pi(V)$ 上等于零而在 $\pi(p)$ 上不等于零; 相应地, 多项式

$$\tilde{F}(X_0,\cdots,X_n)=F(X_0,\cdots,X_{k+1})$$

在 V 上等于零, 但在 p 处不等于零。因此, 任给点 $p\in V$, 我们可以找到在 V 上恒等于零而在 p 不等于零的一个多项式, 并且从而得到

周定理: 射影空间的任意解析簇是代数的。

如果 $F(X_0,\cdots,X_n)$ 和 $G(X_0,\cdots,X_n)\neq 0$ 是在 $\mathbb{P}^n$ 上齐次坐标 X 中次数都为 d 的两个齐次多项式, 那么, 商

$$\varphi(X)=\frac{F(X)}{G(X)}$$

是在 $\mathbb{P}^n$ 上明确定义的亚纯函数; 这样的亚纯函数称为有理函数。注意, 在上下都把 X_0 的幂约掉后, 我们可以把函数 φ 写作

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\frac{f(x_1,\cdots,x_n)}{g(x_1,\cdots,x_n)},$$

其中，f 和 g 是欧氏坐标 x_i 中的多项式(不必次数都是 d)。因此，$\mathbb{P}^n$ 上有理函数域 $K(\mathbb{P}^n)$ 同构于 $\mathbb{C}(x_1,\cdots,x_n)$。

不难得到, $\mathbb{P}^n$ 上的任意亚纯函数是有理的。由周定理, φ 的零点除子 $(\varphi)_0$ 和极点除子 $(\varphi)_\infty$ 都可以表示为齐次多项式 $F(X)$ 和 $G(X)$ 的轨迹。还有, 因为除子 (φ) 同调于零, 从而 F 和 G 有同样的次数, 所以 F/G 是 $\mathbb{P}^n$ 上明确定义的有理函数; 那么, 从

$$(F/G) = (\varphi)$$

对某些 $\lambda \in \mathbb{C}$, 得到,

$$\varphi = \lambda F/G。$$

现在, 如果 $V \subset \mathbb{P}^n$ 是任意光滑簇, 那么, 如果 V 上的亚纯函数限制到 V 是 $\mathbb{P}^n$ 上的有理函数, 它称为有理的。V 上的有理函数先验地形成一个亚纯函数域 $\mathscr{M}(V)$ 的子域; 实际上,

在代数簇 $V \subset \mathbb{P}^n$ 上的每个亚纯函数是有理的。

这个断言的证明分两个部分: 首先, 通过投影, 我们把 V 表示为线性子空间 $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ 的分支覆盖, 且推导出这个表示: 对 $\mathbb{P}^k$ 上有理函数域的 V, 拖回 $\pi^*K(\mathbb{P}^k)$ 在域 $\mathscr{M}(V)$ 中至多有指标 $d = \deg(V)$; 接着, 我们证明域 $K(V)$ 是 $\pi^*K(\mathbb{P}^k)$ 上次数至少为 d 的扩张。

对第一部分, 选择 $\mathbb{P}^n$ 中的一个一般 $(n-k-1)$ 维平面; 在这个阶段, 我们只要求 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 与 V 不相交。设 $\mathbb{P}^k$ 是 k 维余平面, 且 $\pi : V \to \mathbb{P}^k$ 是从 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 的投影。对 $\mathbb{P}^k$ 的每个点 p, 其逆像 $\pi^{-1}(p)$ 就是 V 与 $(n-k)$ 维平面 $\overline{\mathbb{P}^{n-k-1}, p}$ 的相交; 因为 $\overline{\mathbb{P}^{n-k-1}, p}$ 一般与 V 相交与 $d = \deg(V)$ 个点, 所以 π 把 V 表示为几乎处处的 $\mathbb{P}^k$ 的 d 叶分支覆盖。实际上, π 必须处处有限: 如果任给 $\mathbb{P}^k$ 中的点 p, $(n-k)$ 维平面 $\overline{\mathbb{P}^{n-k-1}, p}$ 与 V 相交于一条曲线, 那么, 那条曲线必然与超平面 $\mathbb{P}^{n-k-1} \subset \overline{\mathbb{P}^{n-k-1}, p}$ 相交, 与 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 与 V 不相交矛盾。

注意, 如果我们选择 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标 $X = [X_0,\cdots,X_n]$ 使得 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 由 $(X_0 = \cdots = X_k = 0)$ 给出, $\mathbb{P}^k$ 由 $(X_{k+1} = \cdots = X_n = 0)$ 给出, 那么, 映射 π 由

$$\pi([X_0,\cdots,X_n]) = [X_0,\cdots,X_k]$$

给出。特别是, 到 $\mathbb{P}^k$ 上的任意有理函数 f 的 V 的拖回 π^*f 明显是有理的, 使得在 V 上, 我们有包含

$$\pi^*K(\mathbb{P}^k) \subset K(V) \subset \mathscr{M}(V)。$$

现在, 为了得到 $\pi^*K(\mathbb{P}^k)$ 在 $M(V)$ 中至多有指标 d, 设 φ 为 V 上的任意亚纯函数且设 $D = (\varphi)_\infty$。设 $B \subset \mathbb{P}^k$ 是 π 的分支轨迹; 在 $\mathbb{P}^k - B$ 上, 我们可以通过以下方法定义函数 ψ_i:

$$\begin{aligned}
\psi_1(p) &= \sum_{q\in\pi^{-1}(p)} \varphi(q),\\
\psi_2(p) &= \sum_{q\neq q'\in\pi^{-1}(p)} \varphi(q)\cdot\varphi(q'),\\
&\vdots\\
\psi_d(p) &= \prod_{q\in\pi^{-1}(p)} \varphi(q),
\end{aligned}$$

即, 我们设 $\psi_i(p)$ 是在 V 中 $\pi^{-1}(p)$ 的 d 个点处 φ 的取值中的第 i 个对称多项式。ψ_i 于是在 $\mathbb{P}^k - B - \pi(D)$ 上是全纯函数, 并且因为在远离 $\pi(D)$ 处是有界的, 所以它通过 Riemann 扩张定理扩张到 $\mathbb{P}^k - \pi(D)$ 的全纯函数。我们声明, ψ_i 在所有的 $\mathbb{P}^k$ 上扩张为亚纯函数。如果 $p \in \pi(D)$ 是任意点, $f(x)$ 是在 p 的邻域 Δ 中 $\pi(D)$ 的局域定义函数, 那么, 对足够大的 m, 函数

$$\varphi' = \varphi \cdot \pi^* f^m$$

在 $\pi^{-1}(\Delta)$ 将是全纯的。对 $q \in \Delta - B$, 那么设

$$\psi_i'(q) = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_i} \left(\prod \varphi'(p_{\alpha_1}) \cdots \varphi'(p_{\alpha_i}) \right)$$

是在 $\pi^{-1}(q)$ 的点处 φ' 取值的对称函数; 由于在 Δ 的任意紧致子集中是有界的, 所以 ψ_i' 同样扩张到 Δ 上的全纯函数。写作

$$\psi_i = \frac{\psi_i'}{f^{i-m}},$$

我们得到, ψ_i 扩张到 Δ 中——并且因此所有 $\mathbb{P}^k$ 中——的亚纯函数。因此, 函数 ψ_i 是有理函数。但是现在, 在 V 上, 我们有

$$\varphi^d - \pi^*\psi_1 \cdot \varphi^{d-1} + \pi^*\psi_2 \cdot \varphi^{d-2} - \cdots + (-1)^d \pi^*\psi \equiv 0,$$

即, 每个亚纯函数 $\varphi \in \mathscr{M}(V)$ 满足 $\pi^*K(\mathbb{P}^k)$ 上次数为 d 的多项式关系。由本原元素定理, 于是, 域扩张 $\mathscr{M}(V) \supset \pi^*K(\mathbb{P}^k)$ 是次数最大为 d 有限的。

为了完成我们的断言的证明, 我们要写出一个 V 上的有理函数, 它不满足域 $\pi^*K(\mathbb{P}^k)$ 上次数小于 d 的多项式关系。为此, 我们分解投影映射 π: 选择一般平面 $\mathbb{P}^{n-k-2} \subset \mathbb{P}^{n-k-1}$ 和 $\mathbb{P}^{k+1} \supset \mathbb{P}^k$, 并设 $\pi' : V \to \mathbb{P}^{k+1}$ 是从 $\mathbb{P}^{n-k-2}$ 的投影。我们可以取 $\mathbb{P}^n$ 上的齐次坐标 $[X_0, \cdots, X_n]$ 使得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n-k-1} &= (X_0 = \cdots = X_k = 0), & \mathbb{P}^k &= (X_{k+1} = \cdots = X_n = 0), \\ \mathbb{P}^{n-k-2} &= (X_0 = \cdots = X_{k+1} = 0), & \mathbb{P}^{k+1} &= (X_{k+2} = \cdots = X_n = 0); \end{aligned}$$

用这些坐标的方式, π 象以前一样给出, 且

$$\pi'([X_0, \cdots, X_n]) = [X_0, \cdots, X_{k+1}]$$

使得 π 就是 π' 的分解, 投影是从 $\mathbb{P}^{k+1}$ 中的点 $(X_0 = \cdots = X_k = X_{k+2} = \cdots = X_n = 0)$ 到 $\mathbb{P}^k$ 上。注意, 因为 $\mathbb{P}^{n-k-2}$ 是一般选择的, 所以映射 π' 在其像中的开集上将是一一对应的: 这就是, 对 V 中的某些点 p, $(n-k-1)$ 维平面 $\overline{\mathbb{P}^{n-k-1}, p}$ 与 V 只相交于点 p—— 但是任给 V 中点 p, 经过点 p 的一般 $(n-k-1)$ 维平面只与 V 相交于 p。

现在, 考虑 V 上的有理函数

$$x_{k+1} = \frac{X_{k+1}}{X_0}。$$

假设 x_{k+1} 满足形式的一个方程

$$x_{k+1}^{d'} + \psi_1(x_1, \cdots, x_k) \cdot x_{k+1}^{d'-1} + \cdots + \psi_{d'}(x_1, \cdots, x_k) \equiv 0, d' < d。$$

那么, 对 $\mathbb{P}^n$ 中的一般点 $p = [\alpha_0, \cdots, \alpha_k]$, 在 $\pi'(V) \subset \mathbb{P}^{k+1}$ 中 p 的逆像将由至多 d' 个点 $\{[\alpha_0, \cdots, \alpha_k, \beta]\}$ 组成, 其中,

$$\beta^{d'} + \psi_1\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \cdots, \frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right)\beta^{d'-1} + \cdots + \psi_{d'}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \cdots, \frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right) = 0。$$

但是因为投影 $\pi' : V \to \mathbb{P}^{k+1}$ 到它的像上一般是一对一的, 并且 π 的纤维一般由 $d > d'$ 个点组成, 这是不可能的。 证毕

注意, 因而, 代数簇 V 上的有理函数域不依赖于嵌入。因此, V 上多项式函数的芽层是内蕴地伴随于 V, 对每个 V 上的开集它伴随一个 U 中有限的 V 上的有理函数环。这个层——本学科代数方法中的基本结构层, 也用 $\mathscr{O}_V$ 表示。

通过同类型的讨论, 不难得到,

1. 光滑簇上的任意亚纯微分形式是代数的, 即, 可用有理函数及其微分的方式表达。
2. 在光滑簇之间的任意全纯映射可以由有理函数给出。
3. 光滑簇上的任意全纯矢量丛是代数的, 即, 可以用有理转换函数给出。

我们现在可以证明第一个断言: 明显地, V 上有理函数的微分 $d\varphi$ 对 V 的每个点张开余切空间, 并且有有限多个; 那么, V 上的任意亚纯形式是这些形式与亚纯——从而有理——系数函数的外积的线性组合。第二个断言来自我们下一节的结果: 两个代数簇的积 $V \times W$ 还是一个簇; 由周定理, 图 $\Gamma \subset V \times W \subset \mathbb{P}^n$ 于是被多项式裁出。第三个断言来自本章第五节 Grassmann 流形的讨论和第四节对代数簇上矢量丛的嵌入定理的证明。

所有的这些结果都是一般 *G.A.G.A. 原理* * 的特殊情形: *代数簇上的任意解析对象是代数的*。在本方法中, 周定理和 G.A.G.A. 原理的重要性首先是哲学上的, 而不是实用上的。因为在研究中我们不能把它们作为工具使用——大部分我们的技术都一律可以应用到簇上的所有解析情况, 所以知道诸如"一个给定的亚纯函数或映射是有理的"这些对我们没什么用——在处理解析簇而不是代数簇时, 它们保证了我们仍然在处理同样的东西。

簇的次数

代数簇 $V \subset \mathbb{P}^n$ 的基本射影不变量是它的次数, 定义如下: 取一个 k 维平面 $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ 的类作为生成元, 我们得到同构

$$H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}。$$

由这个恒等式, k 维簇 $V \subset \mathbb{P}^n$ 的次数是 $H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ 的基本类。

*此命名来自 J.P. Serre 的论文, Geometrie Algebrique et Geometrie Analytique, *Annals of the Institute Fourier*, Vol.6。

可用的定义很多。首先, 由 Bertini 应用到 V 的光滑轨迹, 一般 $(n-k)$ 维平面 $\mathbb{P}^{n-k} \subset \mathbb{P}^n$ 与 V 横截相交, 因此与 V 正好相交于

$$^{\#}(\mathbb{P}^{n-k} \cdot V) = \mathrm{degree}(V)$$

个点; 从而, 我们可以把簇的次数定义为 V 与余维数的一般线性子空间相交的点的数目。另一方面, 如果 ω 是 $\mathbb{P}^n$ 上的标准 Kähler 形式,

$$\int_V \omega^k = \mathrm{degree}(V) \cdot \int_{\mathbb{P}^k} \omega^k = \mathrm{degree}(V),$$

所以, 我们可以直接定义 V 的次数为其体积除以 $k!$。(这在有时候被称为 Wirtinger 定理。) 如果 $V \subset \mathbb{P}^n$ 是超曲面, 我们已经得到, 它可以用齐次坐标 $X_0, \cdots, X_n$ 的方式作为齐次多项式 F 的轨迹

$$V = (F(X_0, \cdots, X_n) = 0)$$

而给出。如果 F 的次数为 d, 那么 $V = (\sigma_F)$ 的基本类是 $\eta_V = c_1(H^d)$——即, d 乘以超平面的类——所以 V 的次数为 d。作为另一个选择, 如果

$$[Y_0, Y_1] \xrightarrow{\mu} [a_0Y_0 + b_0Y_1, \cdots, a_nY_0 + b_nY_1]$$

是 $\mathbb{P}^n$ 中的一般直线, 到 $\mathbb{P}^1$ 的 F 的拖回 μ^*F 对 Y_0 和 Y_1 将是 d 次齐次的, 并且因此由代数基本定理它正好有 d 个根。从而 V 的次数是多项式 F 的次数 d。

关于次数的一个基本事实是, 它对相交有多重性。因为一个 $\mathbb{P}^{n-k_1}$ 和一个 $\mathbb{P}^{n-k_2}$ 横截相交于一个 $\mathbb{P}^{n-k_1-k_2}$, 两个几乎处处横截相交的簇的相交次数是它们的次数乘积。更一般地, 如果 V 和 W 是次数为 d_1 和 d_2 的簇, 它们在 $\mathbb{P}^n$ 中相交于相应维数的簇——$V \cap W$ 的不可约分量 $\{Z_i\}$, 那么,

$$d_1 \cdot d_2 = \sum_i \mathrm{mult}_{Z_i}(V \cdot W) \cdot \mathrm{degree}(Z_i)$$

其中, mult_{Z_i} 在第零章第四节中定义。这对余维数特别有意义。例如, 如果 C 和 D 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 d_1 和 d_2 的曲线, 且没有公共分量——即只相交于点——我们得到, 它们至多相交于 d_1d_2 个点。这是下列的弱结论:

Bezout 定理: *两个次数为 d_1 和 d_2 的互质的多项式 $f(x,y), g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, 至多可有 d_1d_2 个联立解。*

次数对投影和锥化的几何操作也有好的性质。明显地, 如果 $V \subset \mathbb{P}^n$ 是任意簇, $p \in \mathbb{P}^n$ 是不在 V 上的任意点, $\pi_p : V \to \mathbb{P}^{n-1}$ 是到超平面上的投影, 那么,

$$\deg(V) = \deg(\pi_p(V)) :$$

$\pi(V)$ 与 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中 $(n-k-1)$ 维平面 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 相交点的数目就是 V 与 $\mathbb{P}^n$ 中 $(n-k)$ 维平面 $\mathbb{P}^{n-k} = \overline{\mathbb{P}^{n-k-1}, p}$ 相交点的数目; 因为由 Bertini, 经过 p 的一般 $\mathbb{P}^{n-k}$ 横截相交于 V, 所以这就是 V 的次数。

锥化是我们前面没有遇到过的操作。如果 $V \subset \mathbb{P}^n$ 是任意簇, $p \in \mathbb{P}^n$ 在任意点都与 V 保持距离, 我们取 V 上经过 p 的锥为经过 p 与 V 相交的直线的并集。容易得到 $\overline{p,V}$ 是簇: 它是在由

$$I = \{(p,r) : r \in V, p \wedge q \wedge r = 0\},$$

定义的接合对应 $I \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 的第一个因子上的投影下的像, 它本身是 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 的一个解析子簇。(作为选择, 如果在齐次坐标 $p = [0, \cdots, 0, 1]$ 中, 设 $\mathbb{P}^{n-1}$ 是超平面 $X_n = 0$; 如果在从 p 的投影下 V 的像 $\pi_p(V) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 是由多项式 $\{F_\alpha(X_0, \cdots, X_{n-1})\}$ 在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中裁出, 那么, 锥 $\overline{p,V}$ 是由多项式 $\{\tilde{F}_\alpha(X_0, \cdots, X_n) = F_\alpha(X_0, \cdots, X_{n-1})\}$ 裁出。) 现在, 如果 $H \subset \mathbb{P}^n$ 是一般的超平面, 不包含 p, 那么, H 与锥 $\overline{p,V}$ 的相交将简单地是从 p 到 H 中的 V 的投影 $\pi_p(V)$; 所以,

$$\begin{aligned} \deg(\overline{p,V}) &= \deg(H \cap \overline{p,V}) \\ &= \deg(\pi_p(V)) = \deg(V)。\end{aligned}$$

可能与簇 $V \subset \mathbb{P}^n$ 相伴的另一个簇是它的*弦簇* $C(V)$, 定义为与 V 相交两次或切于 V (极限情况下)的所有直线的并集。$C(V)$ 是由

$$I = \{(p,q,r) : p \neq q \in V, p \wedge q \wedge r = 0\}$$

定义的接合对应 $I \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 闭集的第三个因子上投影的像。$\bar{I}$ 是 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 的解析子簇, 且因此 $C(V)$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中的解析子簇。注意, 因为在第一个因子上的投影把 I 映射到有 $(\dim V + 1)$ 维纤维的 V 上, 所以 I 的维数为 $2 \cdot \dim V + 1$。因此, $C(V)$ 的维数至多是 $2 \cdot \dim V + 1$; 一般地, 这将是精确的。特别是, 因为光滑簇到超平面中的投影 π_p 将是嵌入当且仅当 $p \notin C(V)$, 我们得到, 如果 $n > 2 \cdot \dim V + 1$, 那么 V 光滑地投影到超平面中。因此,

维数为 k 的任意光滑代数簇可嵌入到 $\mathbb{P}^{2n+1}$ 中。

就象我们将看到的那样, 簇的弦簇 $C(V)$ 的次数的确不单独依赖于 V 的次数。

簇 $V \subset \mathbb{P}^n$ 称为非退化的, 如果它不处在超平面中。我们有关于非退化簇的下列条件:

如果 $V \subset \mathbb{P}^n$ 是不可约的, 非退化的 k 维簇, 那么

$$\deg(V) \geqslant n - k + 1。$$

我们首先对 $\mathbb{P}^n$ 中的曲线来证明它。V 的任意点处在超平面 H 中, 且 V 的次数小于 n, 那么, 与 V 有 n 个公共点的 H 将与 V 有一条曲线; 如果不可约, 那么 V 应处在 H 中。

转到一般情形, 我们必须证明, 维数 $\geqslant 2$ 的不可约非退化簇 V 的一般超平面截面 $H \cap V$ 在 H 中也是不可约和非退化的。后一部分是明显的: 因为退化的 $H \cap V$ 在 $H \in \mathbb{P}^{n^*}$ 上是闭合的, 且因为 V 自己是非退化的, 那么, 我们能找到 V 的 n 个点来张开超平面, 所以, 不是每个 V 的超平面截面都是退化的。

我们的断言的前一半——一个不可约簇的一般超平面截面是不可约的——有点困难。首先我们注意到, 如果 V 是光滑的, 从超平面截面上的 Bertini 定理的 Lefschetz 定理容易

得到: 由 Bertini, 一般超平面截面 $H\cap V$ 是光滑的, 并且因此由 Lefschetz,

$$H_0(H\cap V,\mathbb{C})\cong H_0(V,\mathbb{C})\cong\mathbb{C};$$

即, $H\cap V$ 是连通的。因此, 如果 $H\cap V$ 是可约的, 那么 $H\cap V$ 的分量不得不互相相交; 但是它们的相交点将是 $H\cap V$ 的奇异点, 因此这种情况不能出现。

要证明在一般情形下的断言要求不同的方法。我们如下讨论: 设 $p\in V$ 是任意光滑点, 设 $\mathbb{P}^{n-2}\subset\mathbb{P}^n$ 是与 V 横截相交与 p 的 $(n-2)$ 维平面; 设 Z 是包含 p 的 $V\cap\mathbb{P}^{n-2}$ 的不可约分量。现在, 考虑包含 $\mathbb{P}^{n-2}$ 的 $\mathbb{P}^n$ 中的超平面束 $\{H_\lambda\}$。V 的每一个超平面截面 $H_\lambda\cap V$ 包含 Z, 但是因为每个 H_λ 与 V 横截相交在 p, 作为 $H_\lambda\cap V$ 的光滑点的 p 对每个 λ 至多处在 $H_\lambda\cap V$ 的一个分量中。设 V' 是包含 Z 的截面 $H_\lambda\cap V$ 的不可约分量的并集。那么 V' 是包含在 V 中的 k 维开解析簇, 因此它的闭集是所有的 V; 因而对一般的 λ, $H_\lambda\cap V=H_\lambda\cap V'$ 是不可约的。

现在, 原来的引理可以容易地从曲线得到: 如果 $V\subset\mathbb{P}^n$ 是次数为 d 的任意不可约非退化的 k 维簇, 那么, V 与 $k-1$ 维超平面的一般相交是 $\mathbb{P}^{n-k+1}$ 中次数为 d 的不可约非退化曲线, 并且因此,

$$d\geqslant n-k+1。$$

我们可以重新把引理表述为: 次数为 d 的任意不可约 k 维簇 $V\subset\mathbb{P}^n$ 必须处在维数为 $d+k-1$ 的线性空间中; 作为推论, 那么我们再次得到, $\mathbb{P}^n$ 中任意次数为 1 的簇是线性子空间。

我们将得到, 次数为这个下限的簇——比如 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 n 的曲线, $\mathbb{P}^n$ 中次数为 $n-1$ 的曲面, 等等——有特殊的性质。

代数簇的切空间

对簇 $V\subset\mathbb{P}^n$和一个光滑点 $p\in V$, 伴随一个 $\mathbb{P}^n$ 的线性子空间——*在 p 处 V 的切空间*。它可以用几种方法来定义; 这里我们只讨论两种。

1. 由欧氏坐标, 超平面 $H\subset\mathbb{P}^n$ 的余空间同构于 $\mathbb{C}^n$; 我们可以取 p 处 V 的切空间为通常切子空间 $T_p(V)\subset T_p(\mathbb{C}^n)$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的闭集。明显地, 如果 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $p=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 邻域 $\mathbb{P}^n$ 上的欧氏坐标, 且 V 由函数 $\{f_\alpha(x_1,\cdots,x_n)\}$ 裁出, 那么, 它就是由下式定义的 $\mathbb{P}^n$ 的线性子空间:

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(p)\cdot(x_i-\alpha_i)=0。$$

2. 作为选择, 如果 V 用齐次坐标 $X_0,\cdots,X_n$ 的方式由多项式 $\{F_\alpha(X_0,\cdots,X_n)\}$ 的轨迹给出, 那么它是线性子空间

$$\sum_{i=0}^n\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(p)\cdot X_i=0,$$

其中, 微分作用在形式上: 如果 f_α 是 F_α 的非齐次形式, 那么 $\partial f_\alpha/\partial x_i$ 是 $\partial F_\alpha/\partial X_i$ 的非齐次形式, 利用关系

$$\frac{1}{d}\cdot\sum_{i=0}^n\frac{\partial F}{\partial X_i}=F,$$

其中 $d=\deg(F)$, 我们可以写出:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(p)\cdot X_i &= X_0\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(p)\cdot x_i\\ &= X_0\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(p)\cdot(x_i-\alpha_i)\\ &= X_0\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial X_i}(p)\cdot(x_i-\alpha_i),\end{aligned}$$

因此, 齐次形式描述同样的子空间。

用类似方法, 在点(可能奇异) $p\in V$ 处我们可以定义 $V\subset\mathbb{P}^n$ 的**切锥**。首先, 如果 V 是由齐次多项式 F 裁出的超曲面, p 是 V 上多重度为 k 的一个点——使得阶次 $\leqslant k-1$ 的 F 的所有偏微商都等于零——那么, 我们取 p 处 V 的切锥为轨迹

$$T_p(V)=\left(\sum\frac{\partial^k F}{\partial^{i_0}X_0\cdots\partial^{i_n}X_n}(p)\cdot X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}=0\right)。$$

一般地, 我们将取 p 处簇 $V\subset\mathbb{P}^n$ 的切锥为 p 附近包含 V 的所有超曲面在 p 处的切锥的相交。

这也可以作为处在 V 上且经过 p 的所有曲线在 p 处的切线的并集来得到; 或者作为弦的极限位置 $\lim_{\lambda\to 0}\overline{p,q(\lambda)}$ 而得到, 其中 $q(\lambda)$ 是满足 $q(0)=p$ 的 V 中的弧。

4. Kodaira 嵌入定理

线丛和到射影空间的映射

本节我们将讨论确定什么时候紧致复流形正好是代数簇, 即它什么时候能嵌入到射影空间中。我们首先建立到 $\mathbb{P}^N$ 的映射的一个基本公式。

设 M 是紧致复流形, $L\to M$ 是全纯线丛。回想一下, 对矢量空间 $H^0(M,\mathscr{O}(L))$ 的任意子空间, 伴随 M 上除子的一个线性系

$$|E|=\{(s)\}_{s\in E}\subset\mathrm{Div}(M)。$$

因为 M 是紧致的, 那么只要存在某些非零常数 $\lambda\in\mathbb{C}$, 满足 $s=\lambda s'$, 则 $(s)=(s')$; 因此 $|E|$ 用射影空间 $\mathbb{P}(E)$ 来参数化。

另外假设线性系 $|E|$ 没有基点, 即, 不是所有的 $s\in E$ 都在任意点 $p\in M$ 处等于零。那么, 对每个 $p\in M$, 在 p 处等于零的截面 $s\in E$ 的集合形成一个超平面 $\tilde{H}_p\subset E$——或等价地, 包含 p 的除子 $D\in|E|$ 的集合形成 $\mathbb{P}(E)$ 中的超平面 H_p——所以, 我们可以通过把 $p\in M$ 变成 $H_p\in\mathbb{P}(E)^*$ 来定义一个映射:

$$\iota_E: M\to\mathbb{P}(E)^*。$$

我们可以如下更清楚地描写映射 ι_E。选择 E 的一个基 $s_0,\cdots,s_N$。如果我们设对开集 $U\subset M$ 上 L 的任意平庸化 φ_α 有 $s_{i,\alpha}=\varphi_\alpha^*(s_i)\in\mathscr{O}(U)$, 明显地, 点 $[s_{0,\alpha}(p),\cdots,s_{N,\alpha}(p)]\in\mathbb{P}^N$ 不依赖于选定的平庸化 φ_α; 我们用 $[s_0(p),\cdots,s_N(p)]$ 来表示这个点。用对应于基 $s_0,\cdots,s_N$ 的选择的恒等式 $\mathbb{P}(E)^*\cong\mathbb{P}^N$ 的方式, 于是映射 ι_E 由下式给出:

$$\iota_E(p)=[s_0(p),\cdots,s_N(p)]。$$

从这个表示我们得到, ι_E 是全纯的。

现在, 设 H 是 $\mathbb{P}^N$ 上的超平面丛。M 上的拖回丛由除子 (s_i) 给出——即,

$$L=\iota_E^*(H)。$$

还有, 任意截面 $s=\sum a_is_i$ 是 $\mathbb{P}^N$ 上 H 的截面 $\sum a_iZ_i$ 的拖回; 即,

$$E=\iota_E^*(H^0(\mathbb{P}^N,\mathscr{O}(H)))\subset H^0(M,\mathscr{O}(L))。$$

因此, $\iota_E:M\to\mathbb{P}^N$ 把线丛 L 和子空间 $E\subset H^0(M,\mathscr{O}(L))$ 都确定了, 我们得到一个基本关系:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{非退化映射}\\ f:M\to\mathbb{P}^N,\\ \text{模射影变换}\end{array}\right\}\rightleftharpoons\left\{\begin{array}{c}\text{满足}E\subset H^0(M,\mathscr{O}(L))\\ \text{的线丛}L\to M,\\ \text{使得}|E|\text{没有基点}\end{array}\right\},$$

其中, $\mathbb{P}^N$ 中齐次坐标的选择对应于 E 的基 $s_0,\cdots,s_N$ 的选择。

我们常常把 $\iota_{H^0(M,\mathscr{O}(L))}$ 写作 ι_L, 把 $\iota_{[D]}$ 写作 ι_D。

注意, 在 ι_E 下 M 的像的次数——即, M 与 n 个 $\mathbb{P}^n$ 中的一般超平面的相交——就是表示除子 $D\in|E|$ 的 n 重自相交, 即,

$$\deg(\iota_EM)=c_1(L)^n。$$

簇 $V\subset\mathbb{P}^n$ 称为**正规的**, 如果 V 上给出嵌入 $\iota:V\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ 的线性系是完备的, 即, 如果限制映射

$$H^0(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}(H))\to H^0(V,\mathscr{O}(H))$$

是满射。注意, *任意超曲面 $V\subset\mathbb{P}^n$ 是正规的*: 从恰当层序列

$$0\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H-V)\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H)\xrightarrow{r}\mathscr{O}_V(H)\to 0$$

我们有上同调群的恰当序列

$$H^0(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H))\xrightarrow{r}H^0(V,\mathscr{O}_V(H))\to H^1(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H-V)),$$

但是,

$$H^1(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H-V))=H^1(\mathbb{P}^n,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}((1-d)H))=0,$$

所以 r 是满射。注意, 两个正规簇 $V, V' \subset \mathbb{P}^n$ 将是射影同构的——即, V 可以被 $\mathbb{P}^n$ 的自同构变成 V'——如果通过把 $H_{V'}$ 变成 H_V 的映射有V 双全纯于 V'。特别是, 如果 V 和 V' 是 $\mathbb{P}^n$ 中维数 $\geqslant 3$ 且次数 $d \neq n+1$ 的光滑超曲面, 那么由从属公式, 有

$$K_V = (K_{\mathbb{P}^n} \otimes [V])|_V = [(d-n-1)H],$$

对 V' 同样成立。但是, 由超平面截面上的 Lefschetz 定理, 有

$$H^1(V, \mathscr{O}) \cong H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}) = 0, \quad H^2(V, \mathscr{O}) \cong H^2(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}) = 0,$$

所以, 从伴随于指数层序列的恰当上同调长序列和 Lefschetz 定理, 再次有

$$\mathrm{Pic}(V) = H^1(V, \mathscr{O}^*) \cong H^2(V, \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

对 V' 同样成立。因此, 如果 $\varphi : V \to V'$ 是双全纯的, 那么

$$\varphi^* K_{V'} = K_V \Rightarrow \varphi^*(H|_{V'}) = H|_V,$$

所以 V 和 V' 是射影同构的。结论是:

$\mathbb{P}^n$ 中两个维数 $\geqslant 3$ 且次数 $d \neq n+1$ 的光滑超曲面是同构的, 当且仅当它们是射影同构的; 或等价地

$\mathbb{P}^n$ 中任意维数 $\geqslant 3$ 且次数 $d \neq n+1$ 的光滑超曲面的自同构由 $\mathbb{P}^n$ 中的自同构所诱导的。

这个结果实际上对 $\mathbb{P}^3$ 中次数 $d \neq 4$ 的曲面 V 也成立: 为了应用前面的讨论, 我们只需要知道 $H^2(V, \mathbb{Z})$ 不包含挠率; 这从下列事实得到: V 是单连通的(多次应用 Lefschetz 定理), 还有对同调的挠率部分 $H_{*,\mathrm{tor}}$ 的 Poincaré 对偶的结论:

$$H_{i,\mathrm{tor}}(M, \mathbb{Z}) \cong H^{n-i-1}_{\mathrm{tor}}(M, \mathbb{Z})。$$

我们将用经典的例子来说明到射影空间的映射与无基点线性系之间的对应: 伴随于 $\mathbb{P}^n$ 上线丛 dH 的 *Veronese* 映射。我们已经知道, dH 的整体截面对应于 $Z = [Z_0, \cdots, Z_n]$ 中次数为 d 的齐次多项式, 使得如果 $\{Z^\alpha = Z_0^{\alpha_0} \cdots Z_n^{\alpha_n}\}$ 表示 Z 中次数为 d 的单项式的集合, 那么 Veronese 映射由下式给出:

$$[Z_0, \cdots, Z_n] \mapsto [\cdots, Z^\alpha, \cdots]。$$

容易验证, Veronese 映射是一个光滑嵌入, 其性质为, $\mathbb{P}^n$ 中每个次数为 d 的超曲面变成 $\iota_{dH}(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ 的超平面截面。此处有几个例子:

1. 用 $\mathbb{P}^1$ 中欧氏坐标 $t = Z_1/Z_0$ 的方式, Veronese 映射

$$\iota_{nH} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$$

由

$$t \mapsto [1, t, t^2, \cdots, t^n]$$

给出。它的像是次数为 n 的非退化的曲线, 称为有理正规曲线。

相反地, 如果 $C \subset \mathbb{P}^n$ 是次数为 n 的不可约非退化曲线, 设 $p_1, \cdots, p_{n-1}$ 是 C 的任意 $n-1$ 个独立的点, $V = \overline{p_1, \cdots, p_{n-1}} \cong \mathbb{P}^{n-2}$ 是它们的线性张开, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ 是包含 V 的 $\mathbb{P}^n$ 中的超平面束。于是每个超平面 H_λ 与 C 相交于 n 个点: $p_1, \cdots, p_{n-1}$ 和一个另外的点, 我们称其为 $q(\lambda)$。(如果 H_λ 是包含 V 且在 p_i 与 C 相切的超平面, 那么点 $q(\lambda) = p_i$。) C 的每个点处在唯一的一个超平面 H_λ 上, 且因此映射 $q : \mathbb{P}^1 \to C$ 是一个同构。还有, 因为 nH 是 $\mathbb{P}^1$ 上次数为 n 的唯一线丛, 所以得到, $\mathbb{P}^n$ 中次数为 n 的每个不可约非退化曲线射影同构于有理正规曲线。

2. 用 $\mathbb{P}^2$ 中欧氏坐标 $s = Z_1/Z_0, t = Z_2/Z_0$ 的方式, Veronese 映射 $f = \iota_{2H} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ 由下式给出:

$$(s, t) \mapsto [1, s, t, s^2, st, t^2]。$$

像 $S = f(\mathbb{P}^2)$ 是次数为 $c_1(f^* H_{\mathbb{P}^5})^2 = c_1(2H_{\mathbb{P}^2})^2 = 4$ 的非退化曲面; 注意, 对最后一节而言, 这个次数是最小的。

我们现在离题一下来讨论 Veronese 映射 $S \subset \mathbb{P}^5$ 的一个奇特的性质: 它是 $\mathbb{P}^5$ 中使得其弦 $C(S) = \cup_{p,q \in S} \overline{p, q}$ 的簇是 $\mathbb{P}^5$ 的一个真子簇的唯一非退化曲面。为此, 注意对处在 S 的弦 $\overline{f(u), f(u')}$ 上的任意点 $p \in \mathbb{P}^5$, 直线 $L = \overline{uu'} \subset \mathbb{P}^2$ 被映射到次数为

$$^\#(H_{\mathbb{P}^5} \cdot f(L)) =^\# (2H_{\mathbb{P}^2} \cdot L) = 2$$

的 $\mathbb{P}^5$ 中的曲线, 于是由156(173)页的结果, 它是处在 2 维平面 $V_2 \subset \mathbb{P}^5$ 中的二次曲线。现在, $p \in \overline{f(u), f(u')} \subset V_2$, 且 V_2 中经过 p 的任意直线必与 $f(L)$ 相交两次, 使得处在 S 的弦上的 $\mathbb{P}^5$ 中的任意点处在无穷多 S 的弦上。特别是, 如果我们设 $\mathbb{P}^2$ 中的直线 $(s = 0)$, 设 $u_0 = L_0 \cap L$, 那么, 直线 $\overline{f(u_0), p} \subset \mathbb{P}^5$ 是 S 的弦。因此,

$$C(S) = \bigcup_{\substack{p \in L_0 \\ q \in \mathbb{P}^2}} \overline{f(p), f(q)},$$

从这里我们得到, $C(S)$ 的维数至多是 4。明显地, 我们把 $C(S)$ 描述为

$$\{\alpha \cdot f(s, t) + (1-\alpha) \cdot f(0, t')\} = \{[1, \alpha s, \alpha t + (1-\alpha) t', \alpha s^2, \alpha st, \alpha t^2 + (1-\alpha) t'^2]\}。$$

我们现在解出 α, s, t 和 t': 给定 $X = [X_0, \cdots, X_5] \in C(S)$, X 必是值为

$$\begin{aligned} s &= X_3/X_1, \quad t = X_4/X_1, \quad \alpha = X_1^2/X_0X_3, \\ t' &= (X_2X_3 - X_1X_4)/(X_0X_3 - X_1^2) \end{aligned}$$

的点 $\alpha \cdot f(s, t) + (1-\alpha) \cdot f(0, t')$。最后, $X \in C(S)$ 的坐标满足

$$\begin{aligned} X_5/X_0 &= \alpha t^2 + (1-\alpha) t'^2 \\ &= X_4^2/X_0X_3 + (X_2X_3 - X_1X_4)^2/(X_0X_3(X_0X_3 - X_1^2)), \end{aligned}$$

即,

$$(X_0X_3 - X_1^2)X_5 = X_0X_4^2 + X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_4,$$

且我们得到, $\mathbb{P}^5$ 中 Veronese 曲面的弦簇是一个三次超曲面。

我们现在可以把本节原来的问题表述为: 给定一个全纯线丛 $L \to M$, $\iota_L : M \to \mathbb{P}^N$ 什么时候是一个嵌入? 首先, 为了使 ι_L 有明确的定义, 线性系 $|L|$ 不能有任何基点, 即, 对每个 $x \in M$, 限制映射

$$H^0(M, \mathscr{O}(L)) \xrightarrow{r_x} L_x$$

必须是满射。承认了它, ι_L 就是一个嵌入, 只要:

1. ι_L 是一对一的。显然, 这等价于, 任给 M 中的 x 和 y, 存在一个截面 $s \in H^0(M, \mathscr{O}(L))$, 它在 x 等于零而在 y 不等于零, 即, 等价于, 任给 $x \neq y \in M$, 下列限制映射是满射:

$$(*) \qquad H^0(M, \mathscr{O}(L)) \xrightarrow{r_{x,y}} L_x \otimes L_y\text{。}$$

注意, 任给 L 满足这个条件, 那么 $|L|$ 是无基点的。

2. ι_L 处处有非零微商。如果 φ 是 x 附近 L 的平庸化, 那么这等价于, 任给 $v* \in T_x^*(M)$, 存在 $s \in H^0(M, \mathscr{O}(L))$ 满足 $s_\alpha(x) = 0$ 和 $ds_\alpha(x) = v^*$, 其中 $s_\alpha = \varphi_\alpha^* s$。我们可以把这个要求更本质地如下表述: 设 $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{O}$ 表示在 x 处等于零的 M 上的全纯函数层, 设 $\mathscr{I}_x(L)$ 是在 x 处等于零的 L 的截面层。如果 s 是定义在 x 附近的任意 $\mathscr{I}_x$ 截面, φ_α, φ_β 是在 x 的邻域 U 中 L 的平庸化, 那么, 写出 $s_\alpha = \varphi_\alpha^* s$, $s_\beta = \varphi_\beta^* s$, $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$, 我们有

$$\begin{aligned} d(s_\alpha) &= d(s_\beta) \cdot g_{\alpha\beta} + dg_{\alpha\beta} \cdot s_\beta \\ &= d(s_\beta) \cdot g_{\alpha\beta} \quad \text{在}x\text{处。} \end{aligned}$$

因此我们有一个明确定义的层映射

$$d_x : \mathscr{I}_x(L) \to T_x^{*\prime} \otimes L_x,$$

并且条件 2 可以表述为要求下列映射对任意 $x \in M$ 是满射:

$$(**) \qquad H^0(M, \mathscr{I}_x(L)) \xrightarrow{d_x} T_x^{*\prime} \otimes L_x\text{。}$$

注意, 当 $y \to x$ 时, $(**)$ 是 $(*)$ 的极限情形。

我们要得到的结果是:

Kodaira 嵌入定理: *设 M 是紧致复流形且 $L \to M$ 是正定线丛。那么, 存在 k_0 使得对 $k \geqslant k_0$, 下列映射是明确定义的并且是 M 的一个嵌入:*

$$\iota_{L^k} : M \to \mathbb{P}^N\text{。}$$

让我们现在考虑怎样才能进行证明。要做的第一件事情是把映射 $(*)$ 和 $(**)$ 放到恰当序列中, 并且直接使用我们的消没定理。直到最后, 设 $\mathscr{I}_{x,y}(L)$ 表示在 x 和 y 等于零的 L 的

截面层, $\mathscr{I}_x^2$ 为在 x 处到二阶等于零的 L 的截面层, 即, 使得 $d_x(s)=0$ 的 $\mathscr{I}_x(L)$ 的截面 s。我们有恰当层序列

$$0 \to \mathscr{I}_{x,y}(L) \to \mathscr{O}(L) \xrightarrow{r_{x,y}} L_x \otimes L_y \to 0$$

和

$$0 \to \mathscr{I}_x^2(L) \to \mathscr{I}_x(L) \xrightarrow{d_x} T_x^{*\prime} \otimes L_x \to 0;$$

使得为了证明映射 (*) 和 (**) 是满射, 只需要证明下式就可以了:

$$H^1(M, \mathscr{I}_x^2(L)) = H^1(M, \mathscr{I}_{x,y}(L)) = 0;$$

的确, 用 L^k 代替 L 并对 $k \geqslant k_1$ 利用 $H^1(M, \mathscr{O}(L^k))=0$, 读者可以验证, 我们的定理等价于 L 的高次幂的这个消没定理。问题是, 除非 M 的维数为 1, 层 $\mathscr{I}_{x,y}(L)$ 和 $\mathscr{I}_x^2$ 都不是全纯矢量丛的截面层——对全纯矢量丛 $L \to M$ 和子簇 $V \subset M$, 限制映射 $\mathscr{O}_M(E) \to \mathscr{O}_V(E)$ 的核是矢量丛的截面层当且仅当 V 在 M 中的余维数为 1——并且因此关于它们, 利用我们的调和理论的方法不能得到直接的结果。$\mathscr{I}_x^2$ 和 $\mathscr{I}_{x,y}$ 是*凝聚层*的例子, 凝聚层是与全纯矢量丛的截面层密切相关但更广泛的一类层。凝聚层理论将在第五章讨论。

解决问题的另一种方法是仿照146(161)页命题的证明, 并且在 M 的维数上利用归纳法——例如, 如果我们可以找到包含 x 和 y 的一个光滑超曲面 $V \subset M$, 那么, 为了证明映射 (*) 是满射, 我们只须对 V 上的 $L|_V$ 证明它, 并且证明限制映射

$$H^0(M, \mathscr{O}_M(L)) \to H^0(V, \mathscr{O}_V(L))$$

是满射, 即,

$$H^1(M, \mathscr{O}_M(L-V)) = 0。$$

但是, 这非常清楚地预示了要证明的结果: 先验地, M 根本不需要在它上面有除子。

现在清楚了, 我们的困难在于一个简单的事实, 除非 M 是紧致 Riemann 曲面, M 上的一个点不是一个除子。我们可以用称为*胀开*的一个优美的经典构造来解决这个问题, 它把复流形上的点变成除子。

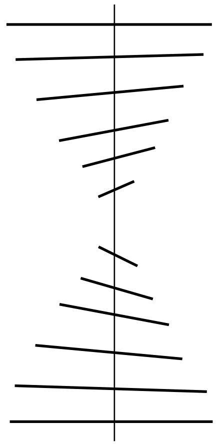
胀开

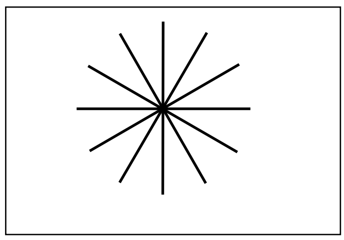
我们将首先描述 $\mathbb{C}^n$ 的圆盘 Δ 中原点的胀开。设 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 是 Δ 中的欧氏坐标, $l=[l_1,\cdots,l_n]$ 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上相应的齐次坐标。设 $\tilde{\Delta} \subset \Delta \times \mathbb{P}^{n-1}$ 是由二次关系

$$\tilde{\Delta} = \{(z,l) : z_i l_j = z_j l_i \quad 任给 i,j\}$$

给出的 $\Delta \times \mathbb{P}^{n-1}$ 的子流形。如果我们把点 $l \in \mathbb{P}^{n-1}$ 看作 $\mathbb{C}^n$ 中的直线, 那么, 把这些方程写作 $z \wedge l = 0$, 我们得到, 这就是定义为 $\{(z,l) : z \in l\}$ 的*接合对应*。

现在, $\tilde{\Delta}$ 由第一个因子上的投影 $\pi : (z,l) \mapsto z$ 映射到 Δ 上; 从几何解释得到, 除了 Δ 中的原点外这个映射是一个同构, 并且 $\pi^{-1}(0)$ 就是 Δ 中直线的射影空间。有效地, *$\tilde{\Delta}$ 由变得不相交的 Δ 中经过原点的所有直线组成*。$\tilde{\Delta}$ 与到 Δ 的其投影映射一起称为 Δ 在原点的胀开。$\Delta \subset \mathbb{C}^2$ 的胀开的真实情况见下图。





注意, 我们已经遇到过流形 $\tilde{\Delta}$: 与第二个因子上的投影 $\pi' : \tilde{\Delta} \to \mathbb{P}^{n-1}$一起, 就是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的万有丛 J。

现在, 设 M 是维数为 n 是复流形, $x \in M$ 是任意点, 且 $z : U \to \Delta$ 是中心在 $x \in M$ 周围的坐标圆盘。投影映射的限制

$$\pi : \tilde{\Delta} - E \to U - \{x\} \subset M$$

给出 $\tilde{\Delta}$ 的 $E = \pi^{-1}x$ 邻域与 M 的 x 邻域之间的一个同构; 我们定义 x 处 M 的胀开 $\tilde{M}$ 为用 $\tilde{\Delta}$ 代替 $\Delta \subset M$ 而得到的复流形

$$\tilde{M}_x = M - \{x\} \cup_\pi \tilde{\Delta}$$

以及自然投影映射 $\pi : \tilde{M}_x \to M$。再次, 投影 $\pi : \tilde{M}_x - \{\pi^{-1}(X)\} \to M - \{x\}$ 是一个同构; 在 $\tilde{M}_x$ 中的逆像 $\pi^{-1}(x)$ 称为胀开的例外除子, 并且通常表示为 E 或 E_x。

注意, 胀开 $\tilde{M} \to M$ 不依赖于在圆盘 Δ 中使用的坐标: 如果 $\{z_i' = f_i(z)\}$ 是 Δ 中另外的坐标, 且 $f_i(0) = 0$, $\tilde{\Delta}'$ 是用这些坐标方式的 Δ 的胀开; 那么, 同构

$$f : \tilde{\Delta} - E \to \tilde{\Delta}' - E'$$

可通过设定 $f(0, l) = (0, l')$ 被扩展到 E 上, 其中,

$$l_j' = \sum \frac{\partial f_j}{\partial z_i}(0) \cdot l_i。$$

的确, 从这里我们得到, 由

$$(0,l)\mapsto\left[\sum l_i\cdot\frac{\partial}{\partial z_i}\right]$$

给出的恒等式

$$E\to\mathbb{P}(T_x(M))$$

同样不依赖于坐标系的选择。

现在, 我们将更详细地描述 E 附近 $\tilde{M}_x$ 的几何。首先, 我们给出 $\tilde{M}_x$ 上 E 附近的局域坐标: 设 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 是中心在 x 的 $U\ni x$ 上的局域坐标。那么,

$$\tilde{U}=\pi^{-1}(U)=\{(z,l)\in U\times\mathbb{P}^{n-1}:z_il_j=z_jl_i\};$$

并且我们设定

$$\tilde{U}_i=(l_i\neq 0)\subset\tilde{U}。$$

用这种方法, 我们得到 E 的邻域 $\tilde{U}$ 的开覆盖, 并且在每个开集 $\tilde{U}_i$ 中, 我们有局域坐标 $z(i)_j$:

$$z(i)_j=\frac{l_j}{l_i}=\frac{z_j}{z_i},\quad j\neq i,$$

和

$$z(i)_i=z_i。$$

$\tilde{U}_i$ 中的映射 $\pi:\tilde{M}_x\to M$ 由

$$(z(i)_1,\cdots,z(i)_i,\cdots,z(i)_n)\mapsto(z(i)_i\cdot z(i)_1,\cdots,z(i)_i,\cdots,z(i)_i\cdot z(i)_n)$$

给出, 并且 $\tilde{U}_i$ 中的除子 E 由

$$E=(\tilde{z}(i)_i=0)$$

给出。在 $\tilde{U}_i\cap\tilde{U}_j$ 中,

$$\begin{aligned}z(i)_k&=z(j)_i^{-1}\cdot z(j)_k\\z(i)_j&=z(j)_j^{-1}\\z_i&=z(j)_i\cdot z_j。\end{aligned}$$

现在, 因为在 $\tilde{U}_i$ 中 $E=(z_i)$, 那么线丛 $[E]$ 在 $\tilde{U}$ 中由转换函数

$$g_{ij}=z(j)_i=\frac{z_i}{z_j}=\frac{l_i}{l_j},\text{在}U_i\cap U_j\text{中},$$

并且因此我们通过确定纤维

$$(*)\qquad [E]_{(x,l)}=\{\lambda(l_1,\cdots,\lambda_n),\lambda\in\mathbb{C}\}$$

实现了 $[E]|_{\tilde{U}}$。特别是, 我们得到, 线丛 $[E]|_E$ 就是 $E\cong\mathbb{P}^{n-1}$ 上的万有丛 $J=-H$。

对偶地, 作为任意点 $(z,l)\in\tilde{U}$ 上的纤维, 线丛 $[-E]=[E]^*$ 为直线 $l\subset\mathbb{C}$ 上的线性泛函空间; $[-E]|_E$ 是 E 上的超平面丛。

现在, 我们已经知道, E 自然等价于 $\mathbb{P}(T'_x(M))$, 使得 E 上 $[-E]$ 的整体截面正好对应于切空间上的线性泛函, 即,

$$(**)\qquad H^0(E,\mathscr{O}_E(-E))=T^{*\prime}_x(M)。$$

另一方面, 给定在 x 处等于零的 U 上的函数 f, 函数 $\pi^*f\in\mathscr{O}(\tilde{U})$ 沿着 E 等于零, 并且因此可以被看作 $\tilde{U}$ 上 $[-E]$ 的截面。由直接的计算, 我们验证, 对任意 $f\in\mathscr{I}_x(U)$, 由恒等式 $(**)$, 截面 $\pi^*f\in\mathscr{O}(-E)(\tilde{U})$ 对 E 的限制对应于在 x 处 f 的微分 $df(x)$, 即, 下图是交换的:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\tilde{U},\mathscr{O}(-E)) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E,\mathscr{O}(-E)) \\ \uparrow & & \| \\ H^0(U,\mathscr{I}_x) & \xrightarrow{d_x} & T^{*\prime}_x(U)。\end{array}$$

这个对应反映了胀开的局域解析特征的基本方面: 在 M 的点 x 处的函数, 映射或微分形式的无穷小性状被变换到 $\tilde{M}$ 上的整体现象。的确, 用经典的语言, 在 x 处 M 的胀开的例外除子中的点称为 x 的“无穷近点”; 例外除子本身称为 x 的“无穷小邻域” 。

下一个要做的是计算 $\tilde{M}$ 上线丛 $[E]$ 和 $[-E]$ 的曲率。我们如下构造 $[E]$ 上的度量: 设 h_1 是用 E 的表示 $(*)$ 的方式由

$$|(l_1,\cdots,l_n)|^2=\|l\|^2$$

给出的 $[E]|_{\tilde{U}}$ 上的度量。设 $\sigma\in H^0(\tilde{M},\mathscr{O}([E]))$ 是 $\tilde{M}$ 上 $[E]$ 的上述整体截面, 有 $(\sigma)=E$, 使得 σ 在 $\tilde{M}-E$ 上是非零的; 设 h_2 是 $[E]|_{\tilde{M}-E}$ 上的度量, 由下式给出:

$$|\sigma(z)|\equiv 1。$$

对 $\varepsilon>0$, 用 U_ε 表示 U 中 x 周围的球 ($\|z\|<\varepsilon$ 来表示, 并且设 $\tilde{U}_\varepsilon=\pi^{-1}(U_\varepsilon)$; 设 ρ_1 ρ_2 是 $\tilde{M}$ 的覆盖 $\{\tilde{U}_{2\varepsilon},\tilde{M}-\tilde{U}_\varepsilon\}$ 的单位分解, 并设 h 是由

$$h=\rho_1\cdot h_1+\rho_2\cdot h_2$$

给出的整体度量。

我们将用这个度量计算 $[E]$ 的曲率。为了表示方便, 设 $\Omega_{[E]}$ 表示 $[E]$ 的曲率 $\Theta_{[E]}$ 的 $\sqrt{-1}/2$ 倍。必须考虑三种情况:

1. 在 $\tilde{M}-\tilde{U}_{2\varepsilon}$ 上, $\rho_2\equiv 1$ 所以 $|\sigma|^2\equiv 1$; 最后,

$$\Omega_{[E]}=dd^c\log\frac{1}{|\sigma|^2}\equiv 0。$$

2. 在 $\tilde{U}_\varepsilon-E\cong U_\varepsilon-\{x\}$ 上, 设用表示 $(*)$ 的方式由

$$\sigma(z,l)=z;$$

给出, 那么,

$$\Omega_{[E]} = dd^c \log \frac{1}{\|z\|^2} = -dd^c \log \|z\|^2,$$

即, $-\Omega_{[E]}$ 就是在由 $(z,l) \mapsto l$ 给出的映射 $\pi' : \tilde{U}_\varepsilon \to \mathbb{P}^{n-1}$ 下, $\mathbb{P}^{n-1}$ 上 Fubini-Study 度量的伴随 $(1,1)$ 形式 ω 的拖回 $\pi'^*\omega$ 。因此,

$$-\Omega_{[E]} \geqslant 0 \quad 在\tilde{U}_\varepsilon - E上。$$

3. 我们已经知道, 在 $\tilde{U}_\varepsilon - E$ 上 $-\Omega_{[E]} = \pi'^*\omega$; 由连续性得到, 在整个 $\tilde{U}_\varepsilon$ 上 $-\Omega_{[E]} = \pi'^*\omega$, 特别是, 在 E 上,

$$-\Omega_{[E]}|_E = \omega > 0。$$

总之, 如果我们设 $\Omega_{[E]}$ 是 $[E]^* = [-E]$ 中对偶度量曲率形式的 $\sqrt{-1}/2$ 倍, 那么我们有,

$$\Omega_{[E]} = -\Omega_{[E]} = \begin{cases} \quad 0 & 在\tilde{M} - \tilde{U}_{2\varepsilon}上, \\ \geqslant \; 0 & 在\tilde{U}_\varepsilon上, \\ > \; 0 & 在T'_x(E) \subset T'_x(\tilde{M})上, 任给x \in E。\end{cases}$$

这个计算的要点是: 设 $L \to M$ 是度量为 h_L 的正定线丛, 其曲率形式 Θ_L 是正定形式 Ω_L 的 $\sqrt{-1}/2$ 倍。那么, 如果 Ω_{π^*L} 是从 $\pi^*L \to \tilde{M}$ 上诱导度量的曲率形式的 $\sqrt{-1}/2$ 倍,

$$\Omega_{\pi^*L} = \pi^*\Omega_L,$$

因此, 在 $\tilde{M} - E$ 上有 $\Omega_{\pi^*L} > 0$。还有, 任给 $x \in E$ 和切矢量 $v \in T_x(\tilde{M})$,

$$\langle \Omega_{\pi^*L}; v, \bar{v} \rangle = \langle \Omega_L; \pi_* v, \overline{\pi_* v} \rangle \geqslant 0,$$

且等号成立当且仅当 $\pi_*(v) = 0$, 即, 当且仅当 v 切于 E。因此,

$$\Omega_{\pi^*L} = \begin{cases} \geqslant \; 0 & 处处, \\ > \; 0 & 在\tilde{M} - E上, \\ > \; 0 & 在T'_x(\tilde{M})/T'_x(E)上 \quad 任给x \in E, \end{cases}$$

并且形式

$$\begin{aligned} \Omega_{\pi^*L^k \otimes [-E]} &= \Omega_{\pi^*L^k} + \Omega_{[-E]} \\ &= k\Omega_{\pi^*L} + \Omega_{[-E]} \end{aligned}$$

在 $\tilde{U}_\varepsilon$ 和 $\tilde{M} - \tilde{U}_{2\varepsilon}$ 中处处正定。还有, 因为形式 $\Omega_{[-E]}$ 在 $\tilde{U}_{2\varepsilon} - \tilde{U}_\varepsilon$ 有下界且 Ω_{π^*L} 在那里是严格正定的, 我们得到, 对足够大的 k , $\Omega_{\pi^*L^k \otimes [-E]}$ 处处是正定的; 即, 存在 k_0 使得对 $k \geqslant k_0$, $\pi^*L^k - E$ 是在 $\tilde{M}$ 上的正定线丛。

注意, 由同样的讨论, 任给正整数 n, 丛 $\pi^*L^k - nE$ 对 $k \gg 0$ 是正定的。

我们需要在 $\tilde{M}_x$ 和 M 之间建立更多的关系:

引理: $K_{\tilde{M}} = \pi^* K_M + (n-1)E$。

证明:

如果 M 是非平庸的亚纯 n 形式 ω , 那么它将容易证明。用 x 的邻域 U 中的局域坐标 $z_1, \cdots, z_n$ 的方式, 写出

$$\omega(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n。$$

现在, 设 $z(i)_j$ 是象以前一样的局域坐标。映射 π 在 $\tilde{U}_i$ 中由

$$(z(i)_1, \cdots, z(i)_n) \to (z(i)_1 z_i, \cdots, z_i, \cdots, z(i)_n z_i)$$

给出, 并且因此

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= \pi^*(f/g) \cdot d(z(i)_1 z_i) \wedge \cdots \wedge dz_i \wedge \cdots \wedge d(z(i)_n z_i) \\ &= \pi^*(f/g) \cdot z_i^{n-1} dz(i)_1 \wedge \cdots \wedge dz(i)_n。\end{aligned}$$

这样, 我们得到, 在 $E = \pi^{-1}(x_0)$ 的邻域中, 除子 $(\pi^*\omega)$ 由 $\pi^*(\omega) + (n-1)E$ 给出。因为不在 E 上明显有 $(\pi^*\omega) = \pi^*(\omega)$, 所以, 正如所期望的那样,

$$K_{\tilde{M}} = [(\pi^*\omega)] = \pi^* K_M + (n-1)E$$

因此, 在 M 是亚纯 n 形式的情况下, 公式得到证明; 这是得到结果的最简单的方法。

为了证明引理的一般性, 我们设 $\underline{U} = \{U_0, U_\alpha\}_\alpha$ 是 M 的坐标开覆盖, 有 $x \in U_0$ 和 $x \notin U_\alpha$, 并且所有的集合 U_α 与处在坐标为 $z_1, \cdots, z_n$ 的坐标补丁中的 U_0 有非空的相交。设

$$\underline{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1} U_\alpha, \tilde{U}_i = \pi^{-1} U_0 \cap (l_i \neq 0)\}$$

是相应的 $\tilde{M}$ 的覆盖; 我们用 $\tilde{U}_i$ 上坐标 $z(i)_j$ 和 $\tilde{U}_\alpha$ 上 $w_{i,\alpha} = \pi^* w_{i,\alpha}$ 的方式来计算 $K_{\tilde{M}}$ 的转换函数 $\{g_{ij}, g_{i\alpha}, g_{\alpha\beta}\}$, 其中, $\{w_{i,\alpha}\}_i$ 是 M 中 U_α 上的坐标。首先, 在 $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ 中有

$$\begin{aligned} z(2)_1 &= z(1)_2^{-1}, \\ z_2 &= z(1)_2 \cdot z_1, \\ z(2)_i &= z(1)_i \cdot z(1)_2^{-1}, \quad i \neq 1, 2, \end{aligned}$$

并且因此, 对坐标变化, Jacobi 矩阵是

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -z(1)_2^{-1} & 0 & \cdots & & & 0 \\ z(1)_2 & z_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & -z(1)_j \cdot z(1)_2^{-2} & 0 & \cdots & 0 & z(1)_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix};$$

一般地,

$$g_{ij} = \det J_{ij} = z(1)_j^{-n+1}。$$

类似地, 在 $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_1$ 中, 有

$$w_{1,\alpha} = z_1 \quad w_{i,\alpha} = z_1 \cdot z(1)_i,$$

$$J_{1\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ z(1)_i & 0 & \cdots & z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix},$$

并且, 一般地,

$$g_{i\alpha} = z_i^{(n-1)}。$$

还有,

$$g_{\alpha\beta} = \pi^* g'_{\alpha\beta},$$

其中 $g'_{\alpha\beta}$ 是关于 U_α 中的坐标 $w_{i,\alpha}$ 和 U_β 中的坐标 $w_{i,\beta}$ 的 K_M 的转换函数。

现在, E 在 $\tilde{U}_i$ 中由 (z_i) 给出, 在 $\tilde{U}_\alpha$ 中由 (1) 给出; 所以, $\underline{\tilde{U}}$ 上 $[E]$ 的转换函数是

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{z_i}{z_j} = z(i)_j^{-1}, \\ h_{i\alpha} &= z_i, \\ h_{\alpha\beta} &= 1。\end{aligned}$$

因此, 从 $K_{\tilde{M}} \otimes [E]^{-n+1}$ 的转换函数是

$$\begin{aligned} f_{ij} &= z(i)_j^{-n+1} \cdot z(i)_j^{n-1} = 1, \\ f_{i\alpha} &= {}_i z_i^{n-1} \cdot {}_i z_i^{-n+1} = 1, \\ f_{\alpha\beta} &= \pi^* g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

并且我们得到, $K_{\tilde{M}} - (n-1)E$ 就是 M 上从经 π 的拖回, 由转换函数

$$e_{0\alpha} = 1, \quad e_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta};$$

给出, 即, $K_{\tilde{M}} - (n-1)E = \pi^* K_M$ 。 证毕

我们将在后面关于曲面的章节中研究更完整的胀开几何的情况; 现在, 我们有充分的知识来证明嵌入定理了。

Kodaira 定理的证明

再次, 设 $L \to M$ 是紧致复流形 M 上的正定线丛。我们想证明, 存在 k_0 使得

1. 对所有 $x \neq y \in M$, $k \geqslant 0$; 限制映射

$$H^0(M, \mathscr{O}(L^k)) \xrightarrow{r_{x,y}} L_x^k \oplus L_y^k$$

是满射; 并且

2. 对所有 $x \in M$, $k \geqslant k_0$, 微分映射

$$H^0(M, \mathscr{I}_x(L^k)) \xrightarrow{d_x} T_x^{*\prime} \otimes L_x^k$$

是满射。

为了证明断言 1, 设 $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ 表示在 x 和 y 处 M 的胀开, $E_x = \pi^{-1}(x)$ 和 $E_y = \pi^{-1}(y)$ 是胀开的例外除子; 为了表述方便, 设 E 表示除子 $E_x + E_y$, 并且 $\tilde{L} = \pi^* L$。(这里, 我们暗中假设了 $n = \dim(M) \geqslant 2$; 如果 M 是 Riemann 曲面, 那么后面所有的讨论对 $\tilde{M} = M$, $\pi = id$ 也成立。)

考虑在截面

$$\pi^* : H^0(M, \mathscr{O}_M(L^k)) \to H^0(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k))$$

上的拖回映射。任给 $\tilde{L}^k$ 的整体截面 $\tilde{\sigma}$, 由 Hartogs 的定理, 由 $M - \{x, y\}$ 上的 σ 给出的 L^k 的截面扩张到整体截面 $\sigma \in H^0(M, \mathscr{O}(L^k))$, 并且因此我们得到, π^* 是同构。还有, 由定义, $\tilde{L}^k$ 沿 E_x 和 E_y 是平庸的, 即,

$$(\tilde{L}^k)|_{E_x} = E_x \times L_x^k, \quad (\tilde{L}^k)|_{E_y} = E_y \times L_y^k,$$

使得,

$$H^0(E, \mathscr{O}_E(\tilde{L}^k)) \cong L_x^k \oplus L_y^k,$$

并且如果 r_E 表示到 E 的限制映射, 那么下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k)) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E, \mathscr{O}_E(\tilde{L}^k)) \\ \uparrow & & \| \\ H^0(M, \mathscr{O}(L^k)) & \xrightarrow{r_{x,y}} & L_x^k \oplus L_y^k \text{。} \end{array}$$

因此, 为了对 x 和 y 证明断言 1, 我们必须证明映射 r_E 是满射。

现在, 在 $\tilde{M}$ 上, 我们有恰当层序列

$$0 \to \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E) \to \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k) \xrightarrow{r_E} \mathscr{O}_E(\tilde{L}^k) \to 0\text{。}$$

选择 k_1 使得在 M 上 $L^{k_1} + K_M^*$ 是正定的。由于第167(186)页的计算, 我们可以选择 k_2 使得对 $k \geqslant k_2$, $\tilde{L}^k - nE$ 是正定的。由前面的引理得到,

$$K_{\tilde{M}} = \tilde{K}_M + (n-1)E,$$

其中, $\tilde{K}_M = \pi^* K_M$; 并且因此对 $k \geqslant k_0 = k_1 + k_2$ 得到

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E) &= \Omega_{\tilde{M}}^n(\tilde{L}^k - E + K_{\tilde{M}}^*) \\ &= \Omega_{\tilde{M}}^n((\tilde{L}^{k_1} + \tilde{K}_M^*) \otimes (\tilde{L}^{k'} - nE)), \end{aligned}$$

有 $k' \geqslant k_2$。现在, 由假设, $\tilde{L}^{k'} - nE$ 在 $\tilde{M}$ 上有正定曲率形式; $L^{k'} + K_M^*$ 在 M 上有正定曲率形式, 所以, $(\tilde{L}^{k_1} + \tilde{K}_M^*)$ 在 $\tilde{M}$ 上有半正定的曲率形式。因此, 线丛 $(\tilde{L}^{k_1} + \tilde{K}_M^*) + \tilde{L}^{k'} - nE$ 在 $\tilde{M}$ 上是正定的, 并且由 Kodaira 消没定理得到:

$$\begin{aligned} H^1(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E)) &= H^1(\tilde{M}, \Omega^n_{\tilde{M}}((\tilde{L}^{k_1} + \tilde{K}_M^*) + (\tilde{L}^{k'} - nE)) \\ &= 0 \quad \text{当} k \geqslant k_0\text{。} \end{aligned}$$

因此, 映射

$$r_E : H^0(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k)) \to H^0(E, \mathscr{O}_E(\pi^* L^k))$$

当 $k \geqslant k_0$ 时是满射, 因此对 x 和 y 证明了断言 1。

断言 2 可以类似地被证明。现在, 设 $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ 表示 x 处 M 的胀开, $E = \pi^{-1}(x)$ 是例外除子。再次, 拖回映射

$$\pi^* : H^0(M, \mathscr{O}_M(L^k)) \to H^0(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k))$$

是同构。还有, 如果 $\sigma \in H^0(M, \mathscr{O}_M(L^k))$, 那么 $\sigma(x) = 0$ 当且仅当 $\tilde{\sigma} = \pi^*\sigma$ 在 E 上等于零; 因此, π^* 限制而给出同构

$$\pi^* : H^0(M, \mathscr{I}_x(L^k)) \to H^0(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E))\text{。}$$

象以前一样, 我们可以得到

$$H^0(E, \mathscr{O}_E(\tilde{L}^k - E)) = L_x^k \otimes H^0(E, \mathscr{O}_E(-E)) \cong L_x^k \otimes T_x^{*\prime},$$

并且下图是交换的:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E)) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E, \mathscr{O}_E(\tilde{L}^k - E)) \\ \wr\!\wr \uparrow \pi^* & & \| \\ H^0(M, \mathscr{I}_x(L^k)) & \xrightarrow{d_x} & T_x^{*\prime} \otimes L_x^k\text{。} \end{array}$$

因此, 我们必须证明, 对 $k \gg 0$, r_E 是满射。

在 $\tilde{M}$ 上, 有一个恰当序列

$$0 \to \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - 2E) \to \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E) \xrightarrow{r_E} \mathscr{O}_E(\tilde{L}^k - E) \to 0\text{。}$$

再次, 选择 k_1 使得在 M 上 $L^{k_1} + K_M^*$ 是正定的, 选择 k_2 使得对 $k' \geqslant k_2$ 在 M 上 $\tilde{L}^{k'} - (n+1)E$ 是正定的。对 $k > k_0 = k_1 + k_2$ 有

$$\mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - 2E) = \Omega^n_{\tilde{M}}((\tilde{L}^{k_1} + \tilde{K}_M^*) \otimes (\tilde{L}^{k'} - (n+1)E)),$$

当 $k' \geqslant k_2$ 时。由 Kodaira 消没定理得到, 对 $k \geqslant k_0$ 有

$$H^1(\tilde{M}, \mathscr{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - 2E)) = 0;$$

因此, 在整体截面上 r_E 是满射的, 并且对容易给定的 x 证明了断言2。

现在, 所剩下的是证明, 我们可以找到一个 k_0 的值, 使得对所有 x 和 y 的选择和所有的 $k \geqslant k_0$ 断言1和2成立。但是, 明显地, 如果 ι_{L^k} 定义在 x 和 y 处并且有 $\iota_{L^k}(x) \neq \iota_{L^k}(y)$, 那么, 对 x 附近的 x' 和 y 附近的 y' 同样正确, 同样地, 如果 ι_{L^k} 在 x 处是光滑的, 那么它在 x 附近的 x' 也是光滑的, 并且把 x 附近的点 $x' \neq x''$ 分离。因为 M 是紧致的, 那么得到了结果。 证毕

在讨论例子和引理之前, 我们给出定理更本质的论述:

Kodaira 嵌入定理: *紧致复流形 M 是代数簇——即, 可嵌入到射影空间中——当且仅当它有一个正定的闭 $(1,1)$ 形式 ω , 并且 ω 的上同调类 $[\omega]$ 是有理的。*

证明: 如果 $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Q})$, 那么对某些 k, $[k\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$; 在恰当序列

$$H^1(M,\mathscr{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota_*} H^2(M,\mathscr{O})$$

中有 $\iota_*([k\omega]) = 0$, 所以存在 $c_1(L) = [k\omega]$ 的全纯线从 $L \to M$。那么线丛 L 将是正定的。 证毕

如果度量的 $(1,1)$ 形式是有理的, 称其为*Hodge* 度量。

推论: *如果 M, M' 是代数簇, 那么 $M \times M'$ 也是。*

证明: 如果 ω, ω' 分别是 M, M' 上的可积正定 $(1,1)$ 闭形式, $\pi : M \times M' \to M$, $\pi' : M \times M' \to M'$ 是投影映射, 那么, $\pi^*\omega + \pi^{*\prime}\omega'$ 也是可积正定 $(1,1)$ 闭形式。 证毕

它的一个经典的例子是由 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ 上线丛 $\pi_1^* H \otimes \pi_2^* H$ 的完备线性系给出的 *Segré* 映射 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$。例如, 用 $\mathbb{P}^1$ 上齐次坐标 $[z_0, z_1]$ 和 $[w_0, w_1]$ 的方式, Segré 映射 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ 由下式给出:

$$([z_0, z_1], [w_0, w_1]) \to [z_0 w_0, z_0 w_1, z_1 w_0, z_1 w_1]。$$

像就是 $\mathbb{P}^3$ 中的二次超曲面 $(X_0 X_3 = X_1 X_2)$。

推论: *如果 M 是代数簇, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ 是点 x 处 M 的胀开, 那么 $\tilde{M}$ 是代数簇。*

证明: 在证明嵌入定理的过程中我们已经知道, 如果 $L \to M$ 是正定的, 那么对 $k \gg 0$, $\pi^* L^k - E$ 也是正定的。

推论: *如果 $\tilde{M} \to M$ 是紧致复流形的有限无分支覆盖, 那么 M 是代数簇当且仅当 $\tilde{M}$ 是。*

证明: 明显地, 如果 $L \to M$ 是正定的, 那么 $c_1(\pi^* L) = \pi^* c_1(L)$ 意味着 $\pi^* L$ 是正定的。相反地, 假定 ω 是 $\tilde{M}$ 上可积正定 $(1,1)$ 形式。任给 $p \in M$, 我们有 M 中点 p 的邻域 U 与点 $q_i \in \pi^{-1}(p)$ 的邻域 U_i 的同构; 我们可以用下式定义 M 上的 $(1,1)$ 形式:

$$\omega'(p) = \sum_{q \in \pi^{-1}(p)} \omega(q)。$$

那么, ω' 是闭 $(1,1)$ 型的, 并且如果 $\eta \in H^{2n-2}_{\mathrm{DR}}(M)$ 是任意整同调类, 那么,

$$\int_M \omega' \wedge \eta = \frac{1}{m} \int_{\tilde{M}} \omega \wedge \pi^* \eta \in \mathbb{Q},$$

其中, m 是覆盖的叶数。因此 $[\omega']$ 是有理的。

定义: 我们称代数簇上的线丛 $L \to M$ 是极强的, 如果 $H^0(M, \mathscr{O}(L))$ 给出一个嵌入 $M \to \mathbb{P}^N$, 即, 存在一个嵌入 $f: M \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 使得 $L = f^*H$。

现在, 从 Kodaira 定理的证明, 我们得到

推论: 如果 $E \to M$ 是任意线丛且 $L \to M$ 是正定线丛, 那么, 对 $k \gg 0$, 丛 $L^k + E$ 是极强的。

5. Grassmann 流形

定义; 胞腔分解和 Schubert 闭链

在本节, 我们将构造和描述 Grassmann 流形——紧致复流形的一个基本族。Grassmann 流形可以被看作射影空间的推广; 整个类似性是显而易见的。

设 V 是维数为 n 的复矢量空间。*Grassmann 流形* $G(k, V)$ 被定义为 V 的 k 维线性子空间的集合; 我们把 $G(k, \mathbb{C}^n)$ 写作 $G(k, n)$。给定 $\mathbb{C}^n$ 中的一个 k 维平面 Λ, 我们可以把 Λ 表示为张开 Λ 的 $\mathbb{C}^n$ 的 k 行矩阵的集合, 即, 秩为 k 的 $k \times n$ 矩阵:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

明显地, 任何这样的矩阵表示 $G(k, n)$ 的一个元素, 并且, 任意两个这样的矩阵 A, A' 表示 $G(k, n)$ 的同一个元素当且仅当对某些 $g \in GL_k$ 有 $\Lambda = g\Lambda'$。

对基数为 k 的每个多重指标 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$, 设 $V_{I^0} \subset \mathbb{C}^n$ 是由矢量 $\{e_j : j \notin I\}$ 张开的 $\mathbb{C}^n$ 中的 $(n-k)$ 维平面, 并且设

$$U_I = \{\Lambda \in G(k, n) : \Lambda \cap V_{I^0} = \{0\}\};$$

U_I 就是 $\Lambda \in G(k, n)$ 的集合, 使得 Λ 的一个——从而任一个——的第 I 个 $k \times k$ 子式是非奇异的。任意 $\Lambda \in U_I$ 有一个唯一的矩阵表示 Λ^I, 它的第 I 个 $k \times k$ 子式是单位矩阵, 比如, 任意 $\Lambda \in U_{\{a, \cdots, k\}}$ 可以唯一由下列形式的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & & \vdots & * & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ldots & 1 & * & \ldots & * \end{pmatrix}。$$

(注意, 这样的 $\Lambda \in U_I$ 的矩阵表示的行矢量就是 Λ 与仿射 $(n-k)$ 维平面 $\{V_{I^0} + e_j : j \in I\}$ 的相交点。) 相反地, 上述形式的任意 $k \times n$ 矩阵表示一个 k 维平面 $\Lambda \in U_I$; 因此, Λ^I 的第 I^0 个 $k \times (n-k)$ 子式的 $k(n-k)$ 个元素给出每个 I 的一个集合双射:

$$\varphi_I : U_I \to \mathbb{C}^{k(n-k)}。$$

注意, 对所有的 I, I', $\varphi_I(U_I \cap U_{I'})$ 在 $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ 中是开集; 我们断言, 实际上, 映射 $\varphi_I \circ \varphi_{I'}^{-1}$ 在这个开集上是全纯的, 因此映射 φ_I 给 $G(k,n)$ 以复流形结构。但是, 很清楚, 如果我们对 $\Lambda \in U_I \cap U_{I'}$ 设 $\Lambda_{I'}^I$ 为 Λ^I 的第 I' 个 $k \times k$ 子式, 那么,

$$\Lambda^{I'} = (\Lambda_{I'}^I)^{-1} \cdot \Lambda^I,$$

并且因为 $(\Lambda_{I'}^I)^{-1}$ 的元素随 Λ^I 的元素全纯地变化, 所有 $\varphi_I \circ \varphi_{I'}^{-1}$ 是全纯的。

因此, $G(k,n)$ 的拓扑是紧致和连通的, 因为酉群 U_n 被映射

$$g \mapsto g(V_k)$$

满射和连续地映到 $G(k,n)$ 上, 其中, $V_k = \{e_1, \cdots, e_k\} \subset \mathbb{C}^n$。整个线性群 GL_n 可迁地作用在 $G(k,n)$ 上。

特别注意, 作为一个复流形, $G(1,n)$ 到 $\mathbb{P}^{n-1}$ 是双全纯的: 直线 $\Lambda \in G(1,n)$ 的"矩阵表示" $(v_1, \cdots, v_n)$, 由 $G(1,n)$ 与 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的自然的集合论恒等性, 对应到 $\Lambda \in \mathbb{P}^{n-1}$ 的齐次坐标, 并且,

$$\Lambda^{\{i\}} = \left(\frac{v_1}{v_i}, \cdots, 1, \cdots, \frac{v_n}{v_i}\right),$$

所以,

$$\varphi_{\{i\}} = \Lambda \mapsto \left(\frac{v_1}{v_i}, \cdots, \frac{v_n}{v_i}\right),$$

即, 由 $\varphi_{\{i\}}$ 给出的 $G(1,n)$ 上的坐标就是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的欧氏坐标。对偶地, 我们有 $G(n-1,n) \cong \mathbb{P}^{n-1*}$——$\mathbb{P}^{n-1}$ 中的超平面射影空间。

最后, 我们注意到, $G(k,n)$ 既可以看作 $\mathbb{C}^n$ 中线性 k 维平面的集合, 也可以等价地看作 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中 $(k-1)$ 维平面 $\overline{\Lambda}$ 的集合。本节我们的观点将是, 大多数情况下是前者, 因为它容易搞清闭链的维数和余维数, 但是当 Grassmann 流形出现在几何问题中时, 我们一般用后者来讨论。

胞腔分解

回想一下, $\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$ 的胞腔分解

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \cup \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^0$$

是这样得到的: 选择 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的线性子空间的一个标志:

$$V = \left(V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_{n-1} \subsetneqq V_n \subsetneqq \mathbb{C}^{n+1}\right),$$

再取 $W_i \cong \mathbb{C}^{i-1} = \{l \subset \mathbb{C}^{n+1} : l \subset V_i, l \not\subset V_{i-1}\}$。

同样的方法可以给出 Grassmann 流形的胞腔分解: 如果我们设 $V_i = \{e_1, \cdots, e_i\} \subset \mathbb{C}^n$, 那么, 与每个 V_i 的交集有确定的维数的 $\Lambda \in G(k,n)$ 的集合表明是一个单胞腔(就象我们将得到的一样)。构建如下: 对每个 $\Lambda \in G(k,n)$, 考虑子空间的升序列

$$0 \subset \Lambda \cap V_1 \subset \Lambda \cap V_2 \subset \cdots \subset \Lambda \cap V_{n-1} \subset \Lambda \cap V_n = \Lambda。$$

对一般的 Λ, $\Lambda\cap V_i$ 对 $i\leqslant n-k$ 时是零, 其后是 $(i+k-n)$ 维的——的确, 我们已经知道, 这样的 Λ 的集合就是开集 $U_{I^0}\cong\mathbb{C}^{k(n-k)}\subset G(k,n)$。现在, 对任意整数系列 $a_1,\cdots,a_k$, 设

$$W_{a_1,\cdots,a_k}=\{\Lambda\in G(k,n):\dim(\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i})=i\}。$$

我们看到, $\dim(\Lambda+V_{n-k+i-a_i})=n-a_i$, 并且因此 $W_{a_1,\cdots,a_i}$ 将是空集, 除非 $a_1,\cdots,a_i$ 是 $\leqslant n-k$ 的非升整数系列。因为 $\dim(\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i})=i$ 当且仅当 Λ 的矩阵表示的最后 $k\times(k+a_i-i)$ 子式的秩正好是 $k-i$, 所以得到, 闭集

$$\overline{W_{a_1,\cdots,a_k}}=\{\Lambda:\dim(\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i})\geqslant i\}$$

是 $G(k,n)$ 的解析子簇。

我们可以如下选择 k 维平面 $\Lambda\in W_{a_1,\cdots,a_k}$ 的一个特殊基: 设 v_1 是直线 $\Lambda\cap V_{n-k+1-a_1}$ 的生成元, 归一化使得 $\langle v_1,e_{n-k+1-a_1}\rangle=1$; 即

$$v_1=(*,*,\cdots,*,1,0,\cdots,0)。$$

现在, 取 v_2 使得 v_1 和 v_2 一起张成 $\Lambda\cap V_{n-k+2-a_2}$, 归一化使得

$$\langle v_2,e_{n-k+1-a_1}\rangle=0,\quad\langle v_2,e_{n-k+2-a_2}\rangle=1。$$

继续进行, 选择 v_i 使得 $v_1,\cdots,v_i$ 张成 $\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i}$ 且使得

$$\langle v_i,e_{n-k+j-a_j}\rangle=\begin{cases}0, & j<i,\\ 1, & j=i。\end{cases}$$

明显地, 在每个阶段的 v_i 的选择完全由这些条件确定; 因此, k 维平面 Λ 有如下形式的唯一矩阵表示:

$$\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & n & - & k & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & | & & & & & & & & & & \\
* & * & * & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\\
* & * & * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0\\
* & * & * & 0 & * & 0 & * & * & * & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0\\
 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & & & & & & & \vdots\\
* & * & * & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 & * & * & * & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0\\
 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & & & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots\\
* & * & * & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 & * & & \cdots & 0 & \cdots & * & * & * & * & *
\end{array}\right)$$

$$\longleftarrow a_1 \longrightarrow$$

$$\longleftarrow a_2 \longrightarrow$$

$$\leftarrow a_3 \rightarrow$$

相反地, 这个形式的任意矩阵表示一个 k 维平面 $\Lambda\subset W_{a_1,\cdots,a_k}$。因为 $(k^2+\sum a_i)$ 个元素在图中被确定, 其余的完全自由变化, 所以得到同态

$$W_{a_1,\cdots,a_k}\cong\mathbb{C}^{k(n-k)-\sum a_i};$$

因此, 集合 $W_{a_1,\cdots,a_k}$ 给出了 $G(k,n)$ 的胞腔分解。因为我们只有偶数维的胞腔, 所以所有的边缘映射是零, 并且推导出

命题: *Grassmann 流形 $G(k,n)$ 的整同调是无挠的, 在实 $2\sum a_i$ 维中由闭链 $\sigma_{\alpha_1,\cdots,a_k}=\overline{[W_{a_1,\cdots,a_k}]}$ 自由生成, 其中, $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 是 0 和 $n-k$ 之间的所有非升整数系列。特别是, $G(k,n)$ 中的所有上同调是解析的。*

一般地, 任给 $\mathbb{C}^n$ 中的标志 $V=(V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_{n-1}\subset V_n)$, 我们设

$$\sigma_a(V)=\{\Lambda:\dim(\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i})\geqslant i\}。$$

明显地, 子簇 $\sigma_a(V)$ 的同调类不依赖于标志的选择, 因为我们可以找到 $\mathbb{C}^n$ 的线性自同构的连续族把任意标志变到其它标志。子簇 $\sigma_a(V)$ 称为 Grassmann 流形的 *Schubert* 闭链。

不同于射影空间的最简单的 Grassmann 流形的例子是 $\mathbb{C}^4$ 中 2 维平面的 $G(2,4)$。$G(2,4)$ 上的 Schubert 闭链是

$$\begin{aligned}
\text{codim}1: &\quad \sigma_{1,0}(V_2)=\{\Lambda:\dim(\Lambda\cap V_2)\geqslant 1\},\\
\text{codim}2: &\quad \sigma_{1,1}(V_3)=\{\Lambda:\Lambda\subset V_3\},\\
&\quad \sigma_{2,0}(V_1)=\{\Lambda:\Lambda\supset V_1\}\\
\text{codim}3: &\quad \sigma_{2,1}(V_1,V_3)=\{\Lambda:V_1\subset\Lambda\subset V_3\}。
\end{aligned}$$

另外, 如果我们把 $G(2,4)$ 看作 $\mathbb{P}^3$ 中的直线, 固定由 $\mathbb{P}^3$ 的点, 线和面组成的射影标志 $p\in l_0\subset h$, 那么,

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,0}(l_0) &= \{l:l\cap l_0\neq\emptyset\},\\
\sigma_{2,0}(p) &= \{l:p\in l\},\\
\sigma_{1,1}(h) &= \{l:l\in h\},\\
\sigma_{2,1}(p,h) &= \{l:p\in l\subset h\}。
\end{aligned}$$

Schubert 运算

现在, 我们已经确定了 $G(k,n)$ 的加法上同调, 我们希望描写其乘法结构——即, 把一般 Schubert 闭链 σ_a, σ_b 的相交表示为同调中其它 Schubert 闭链的线性组合。

第一个任务是写出互补维数中的相交配对。为此, 设

$$\sigma_a(V)=\{\Lambda:\dim(\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i})\geqslant i\}$$

和

$$\sigma_b(V') = \{\Lambda : \dim(\Lambda \cap V'_{n-k+i-a_i}) \geqslant i\}$$

为一般的 Schubert 闭链。那么, 对每个 i 和任意 $\Lambda \in \sigma_a(V) \cap \sigma_b(V')$, 有

$$\begin{aligned} \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) &\geqslant i, \\ \dim(\Lambda \cap V'_{n-k+(k-i+1)-b_{k-i+1}}) &\geqslant k-i+1, \\ \Rightarrow \Lambda \cap V_{n-k+i-a_i} \cap V'_{n-i+1-b_{k-i+1}} &\neq (0)。 \end{aligned}$$

但是现在, 如果 $a_i + b_{k-i+1} > n-k$, 那么, 有

$$\begin{aligned} (n-k+1-a_i) + (n-i+1-b_{k-i+1}) &= 2n-k+1-(a_i+b_{k-i+1}) \\ &\leqslant n, \end{aligned}$$

所以我们可以选择标志 V 和 V' 使得 $V_{n-k+i-a_i}$ 和 $V'_{n-i+1-b_{k-i+1}}$ 只相交于原点。因此, 闭链 $\sigma_a(V)$ 和 $\sigma_b(V')$ 可以被分开, 即,

$$^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_b) = 0, \quad 除非对所有的 i, a_i + b_{k-i+1} \leqslant n-k。$$

现在, 假设 σ_a 和 σ_b 是互补维数的闭链, 使得

$$\sum a_i + \sum b_i = k(n-k);$$

那么,

$$a_i + b_{k-i+1} \ 对所有 i, \leqslant n-k \Rightarrow b_{k-i+1} = n-k-a_i,$$

即, 除了 $\sigma_{n-k-a_n,\cdots,n-k-a_1}$, 闭链 σ_a 与互补维数的所有 Schubert 闭链相交零次。因为 Schubert 闭链形成一个 $H_*(G(k,n),\mathbb{Z})$ 的整数基, 所以它可以从 Poincaré 对偶和解析闭链相交次数为正的事实得到, 也可以直接验算:

$$^{\#}(\sigma_a, \sigma_{n-k-a_n,\cdots,n-k-a_1}) = 1。$$

那么, 总之, 我们有公式

$$^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \delta_{(a_1,\cdots,a_k)}^{(n-k-b_k,\cdots,n-k-b_1)}。$$

这使得我们可以通过计算相交情况把 $G(k,n)$ 上的任意闭链 γ 表示为 Schubert 闭链的线性组合, 即,

$$\gamma = \sum {}^{\#}(\gamma \cdot \sigma_{n-k-a_k,\cdots,n-k-a_1}) \cdot \sigma_a,$$

特别是把计算任意维数中 Schubert 闭链的配对相交的问题约化成在互补维数中计算三元相交的问题:

$$(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \sum {}^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_{n-k-c_k,\cdot,n-k-c_1}) \cdot \sigma_c。$$

作为一个例子, 任给次数为 2 的超曲面 $W \subset \mathbb{P}^n$, 设 $\tau(W) \subset G(2,n+1)$ 表示处在 W 上的 $\mathbb{P}^n$ 中的直线集合。 $\tau(W)$ 明显是 $G(2,n+1)$ 中的解析闭链, 并且因为直线处在 W 上

当且仅当 l 的三个点处在 W 上, 所以 $\tau(W)$ 的余复维数为 3。 $G(2,n+1)$ 只有两个余维数为 3 的 Schubert 闭链—— $\sigma_{3,0}$ 和 $\sigma_{2,1}$ ——所以我们可以写出:

$$\tau(W) =^{\#} (\tau(W)\cdot\sigma_{n-1,n-4})\cdot\sigma_{3,0} +^{\#} (\tau(W)\cdot\sigma_{n-2,n-3})\cdot\sigma_{2,1}。$$

现在, $\sigma_{n-1,n-4}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中包含点 p 和包含于 4 维平面 $V_4 \subset \mathbb{P}^n$ 中的直线的集合; 如果我们选择 W 外的点 p, 那么明显 $\tau(W)$ 将与 $\sigma_{n-1,n-4}$ 不相交。另一方面, $\sigma_{n-2,n-3}$ 是与直线 $l_0 \subset \mathbb{P}^n$ 且包含于 3 维平面 $s \subset \mathbb{P}^n$ (它包含了 l_0)中的直线的闭链。一般地, $W' = W \cap S$ 将是 $S \cong \mathbb{P}^3$ 中的光滑二次曲面, 且 l_0 与它相交于两个点 p_1 和 p_2; 明显地, 任意直线 $l \subset \tau(W)\cap\sigma_{n-2,n-3}$ 经过 p_1 或 p_2。但是, W' 上经过 p_i 的任意直线必处于切平面 $T_{p_i}(W')$ 中; 并且 $T_{p_i}(W')\cap W$ 是次数为 2 的奇异曲线, 因此由两条直线组成。因此 $\tau(W)$ 一般与 $\sigma_{n-2,n-3}$ 相交于四个点, 并且由此得到

$$\tau(W) \sim 4\cdot\sigma_{2,1}。$$

特别是, 如果 W 和 W' 是 $\mathbb{P}^4$ 中两个一般二次超曲面, 在一个光滑曲面 S 中横截相交, 那么, 由上述结论, S 有处在其上的 $\mathbb{P}^4$ 中的

$$^{\#}(\tau(W)\cdot\tau(W'))_{G(2,5)} =^{\#} (4\sigma_{2,1}\cdot 4\sigma_{2,1})_{G(2,5)} = 16$$

条直线。我们将在第四章第四节验证它。

类似地, 我们可以计算其它低次数的超曲面的 $\tau(W)\subset G(2,n+1)$ 的同调类, 只要我们知道关于特殊情形的很少的结果。

在我们讨论一般的相交前, 我们想提供两个一般的现象。

首先, 我们将稍微改变一下我们的公式, 如下: 对非负整数的任意系列 $a = a_1, a_2, \cdots$, 我们设 $\sigma_a(V)$ 表示闭链

$$\sigma_a(V) = \{\Lambda : \dim(\Lambda\cap V_{n-k+i-a_i}) \geqslant i\} \subset G(k,n)$$

使得符号 σ_a 可用来表示任意 Grassmann 流形中的 Schubert 闭链。当然, σ_a 在 $G(k,n)$ 中是空的, 除非对所有的 i 有 $a_i \leqslant n-k$, 对所有 $i>k$ 有 $a_i = 0$ 并且 a 是非升系列。

现在, 包含 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$ 诱导出包含

$$\iota_1 : G(k,n) \to G(k,n+1)$$

和

$$\iota_2 : G(k,n) \to G(k+1,n+1),$$

它们分别通过把 $\Lambda\subset\mathbb{C}^n$ 变成 $\Lambda\subset\mathbb{C}^{n+1}$ 和 $\Lambda\oplus\{e_{n+1}\}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ 而得到。在这些包含下, 不难得到, 对 $\mathbb{C}^n$ 中的标志 V 和 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的标志 V', 有

$$\sigma_a(V) = \iota_1^{-1}(\sigma_a(V')) = \iota_2^{-1}(\sigma_a(V')),$$

即, 如果我们用 $\tilde{\sigma}_a$ 表示 σ_a 的 Poincaré 对偶, 那么,

$$\iota_1^*\tilde{\sigma}_a = \iota_2^*\tilde{\sigma}_a = \tilde{\sigma}_a。$$

由此, 对 $G(k,n+1)$ 或 $G(k+1,n+1)$ 中的 Schubert 闭链相交, 任意公式

$$(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \sum n_c \cdot \sigma_c$$

对 $G(k,n)$ 也成立, 并且, 我们可以定义*万有 Schubert 系数* $\delta(a,b;c)$ 使公式

$$(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \sum \delta(a,b;c) \cdot \sigma_c$$

在所有的 $G(k,n)$ 中成立。

注意, 从我们的第一个计算, 得到任给 k,n 有

$$\delta(a,b;c) =^{\#} (\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_{n-k-c_k,\cdots,n-k-c_1})_{G(k,n)}$$

使得 σ_c 在 $G(k,n)$ 中是非空的, 即, 使得对所有的 i 有 $c_i \leqslant n-k$ 且对所有 $i>k$ 有 $c_i=0$。特别是, 如果我们设 $l(c)$ 表示系列 c 的长度, 即, 非零元素的数目, 在上面, 我们可以取 $k=l(c)$, $n-k=c_1$ 以得到

$$(*) \qquad \delta(a,b;c) =^{\#} (\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_{c_1-c_k,\cdots,c_1-c_2}) \quad \text{在}G(l(c),l(c)+c_1)\text{中。}$$

作为直接的结果, 我们得到, $\delta(a,b;c)=0$, 只要 σ_a 或 σ_b 在 $G(l(c),l(c)+c_1)$, 即, $\delta(a,b;c)=0$ 只要或者

1. $c_1 < a_1$ 或 $c_1 < b_1$, 或者
2. $l(c) < l(a)$ 或 $l(c) < l(b)$。

接下来, 注意, 任给维数为 n 的矢量空间 W, 我们有一个自然同构

$$* : G(k,W) \to G(n-k,W^*)$$

它由下式定义:

$$*\Lambda = \mathrm{Ann}(\Lambda) = \{l \in V^* : l(\Lambda)=0\}。$$

设 $V=\{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = W\}$ 是 W 的标志, 并且设 $V^*=\{V_1^* \subset V_2^* \subset \cdots \subset V_n^* = W^*\}$ 是 W^* 中的对偶标志, 由下式给出:

$$V_i^* = \mathrm{Ann}(V_{n-i})。$$

由线性代数, 对 W 中的任意 k 维平面 Λ, 有

$$\dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) \geqslant i \Leftrightarrow \dim(*\Lambda \cap V^*_{k-i+a_i}) \geqslant a_i。$$

因此, 任给 a , *Schubert 闭链* $\sigma_a \subset G(k,n)$ *的像* $*\sigma_a \subset G(n-k,n)$ *是 Schubert 闭链* a^*, *其中*, a^* *被定义为最小非升系列使得*

$$a^*_{a_i} \geqslant i \quad \text{对所有}i。$$

例如,

$$*(\sigma_2) = \sigma_{1,1}, \quad *(\sigma_{2,1,1}) = \sigma_{3,1}。$$

一般地, 我们将有

$$\delta(a, b; c) = \delta(a^*, b^*; c^*),$$

所以我们可以期望, 当应用到 σ_a^*, σ_b^* 时, Schubert 闭链 $\sigma_a\ \sigma_b$ 的相交的任意公式给出一个对偶公式。

注意,

$$l(a^*) = a_1 \quad 并且 \quad a_1* = l(a)$$

使得上面的公式 1 和 2 如所希望的那样, 在 $*$ 映射下等价。

我们现在转到原来的问题来计算一般的 a, b 和 c 的 $\delta(a, b; c)$。我们首先给出一个约化, 它使得我们足以在很多情形下进行计算。

我们的基本方法就是用线性代数约化到更小的 Grassmann 流形。例如, 考虑满足 $\alpha+\beta+\gamma = 2k+1$ 的三元指标 α, β 和 γ。那么, 任给 k 维平面 $\Lambda \in \sigma_a(V)\cap\sigma_b(V')\cap\sigma_c(V'')$, 有

$$\begin{aligned}
\dim(\Lambda \cap V_{n-k+\alpha-a_\alpha}) &\geqslant \alpha, \\
\dim(\Lambda \cap V'_{n-k+\beta-b_\beta}) &\geqslant \beta, \\
\dim(\Lambda \cap V''_{n-k+\gamma-c_\alpha}) &\geqslant \gamma,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dim(\Lambda \cap V_{n-k+\alpha-a_\alpha} \cap V'_{n-k+\beta-b_\beta} \cap V''_{n-k+\gamma-c_\alpha}) \geqslant 1。$$

因此, 在 $G(k, n)$ 中, $^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c) = 0$, 如果

$$(k-\alpha+a_\alpha) + (k-\beta+b_\beta) + (k-\gamma+c_\gamma) > n-1,$$

即, 如果

$$a_\alpha + b_\beta + c_\gamma > n-k。$$

假定在另一方面, $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma = n-k$, 即, 一般选定的子空间 $V_{n-k+\alpha-a_\alpha}$, $V'_{n-k+\beta-b_\beta}$ 和 $V''_{n-k+\gamma-c_\alpha}$ 相交在直线 $L \subset \mathbb{C}^n$ 中。那么, 任何 $\Lambda \in \sigma_a(V)\cap\sigma_b(V')\cap\sigma_c(V'')$ 必包含 L。设 L^0 表示 $\mathbb{C}^n$ 中互补于 L 的子空间, 并且设 π 表示核为 L 的到 L^0 上的 $\mathbb{C}^n$ 的映射。设

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1 &= \pi(V_1), \\
&\vdots \\
\overline{V}_{n-k+\alpha-a_\alpha-1} &= \pi(V_{n-k+\alpha-a_\alpha-1}) = \pi(V_{n-k+\alpha-a_\alpha}), \\
&\vdots \\
\overline{V}_{n-2} &= \pi(V_{n-1}), \\
\overline{V}_{n-1} &= \pi(V_n) = L^0,
\end{aligned}$$

并且类似定义 $\overline{V}'_i$ 和 $\overline{V}''_i$。那么, $\overline{V}=\{\overline{V}_i\}$, $\overline{V}'=\{\overline{V}'_i\}$ 和 $\overline{V}''=\{\overline{V}\}$ 是 L^0 中的横截标志, 并且任给 $(k-1)$ 维平面 $\overline{\Lambda}\subset\Lambda^0$, 我们得到,

$$\begin{aligned}\Lambda &= \overline{L,\overline{\Lambda}}\in\sigma_a(V)\cap\sigma_b(V')\cap\sigma_c(V'')\\ &\Leftrightarrow \overline{\Lambda}\in\sigma_{a_1,\cdots,\hat{a}_\alpha,\cdots,a_k}(\overline{V})\cap\sigma_{b_1,\cdots,\hat{b}_\beta,\cdots,b_k}(\overline{V}')\cap\sigma_{c_1,\cdots,\hat{c}_\gamma,\cdots,c_k}(\overline{V}'')。\end{aligned}$$

因此, 我们得到:

约化公式 I: 任给满足 $\alpha+\beta+\gamma=2k+1$ 的三个指标 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant k$,

$$^{\#}(\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c)_{G(k,n)}=\begin{cases}0 & \text{如果}a_\alpha+b_\beta+c_\gamma>n-k,\\ ^{\#}(\sigma_{a-a_a}\cdot\sigma_{b-b_\beta}\cdot\sigma_{c-c_\gamma})_{G(k-1,n-1)} & \text{如果}a_\alpha+b_\beta+c_\gamma=n-k。\end{cases}$$

注意, 如果我们取 $\beta=\gamma=k$, 这个约化在 $a_1=n-k$ 时可用; 如果取 $\gamma=k$, 它在任给 i, $a_i+b_{k+1-i}=n-k$ 时可用。

正如所提出的一样, 我们可以把这个第一个约化应用到 $G(n-k,n)$ 中闭链的相交 $^{\#}(\sigma_{a^*}\cdot\sigma_{b^*}\cdot\sigma_{c^*})$; 我们得到,

约化公式 II: 对满足 $a_\alpha+b_\beta+c_\gamma\geqslant 2(n-k)+1$ 的三个系数 a_α, b_β, c_γ, 有

$$\begin{aligned}&^{\#}(\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c)_{G(k,n)}\\ &=\begin{cases}0 \qquad \text{如果}\alpha+\beta+\gamma>k,\\ ^{\#}(\sigma_{a_1-1,\cdots,a_\alpha-1,a_{\alpha+1},\cdots,a_k}\cdot\sigma_{b_1-1,\cdots,b_\beta-1,b_{\beta+1},\cdots,b_k}\cdot\sigma_{c_1-1,\cdots,c_\gamma-1,c_{\gamma+1},\cdots,c_k})_{G(k,n-1)}\\ \qquad\quad \text{如果}\alpha+\beta+\gamma=k。\end{cases}\end{aligned}$$

为了这个公式, 我们可以形式上设 $a_0=b_0=c_0=n-k$; 因此, 如果我们取 $\gamma=\beta=0$, 那么这个约化在 $a_k\neq 0$ 时可用, 如果取 $\gamma=0$, 它对某些 i, $a_i+b_{k-i}\geqslant n-k+1$ 时可用。

还要注意, 如果出现在公式中的系列 $b_1-1,\cdots,b_{\beta-1},b_{\beta+1},\cdots$ 不再非升——即, 如果 $b_\beta=b_{\beta+1}$ ——那么, 相交数目为零: 只把公式应用到 $\alpha,\beta+1,\gamma$ 即可。因此, 我们可以在所有的情况下使用这个公式, 只要我们采用下列约定: 对 b 不是非升系列, σ_b 是空的。

作为一个运算的例子, 在 $(\sigma_{311}\cdot\sigma_{21})$ 的表达式中, 我们计算作为 Schubert 闭链线性组合的 s_{521} 的系数 $\delta(311,21;521)$。由 $(*)$ 和约化公式, 我们有

$$\begin{aligned}\delta(311,21;521) &= {}^{\#}(\sigma_{311}\cdot\sigma_{21}\cdot\sigma_{43}) && \text{在}G(3,8)\text{中}\\ &= {}^{\#}(\sigma_2\cdot\sigma_{21}\cdot\sigma_{43}) && \text{在}G(3,7)\text{中}\\ &= {}^{\#}(\sigma_2\cdot\sigma_{21}\cdot\sigma_3) && \text{在}G(2,6)\text{中}\\ &= {}^{\#}(\sigma_2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_3) && \text{在}G(2,5)\text{中}\\ &= {}^{\#}(\sigma_2\cdot\sigma_1) && \text{在}G(1,4)=\mathbb{P}^3\text{中}\\ &= 1。\end{aligned}$$

这里给出的两个公式不是每次都可以应用的, 但是在低的余维数中可时常得到结果。如果有一个因子 σ_a 是定义为一种 $\sigma_{a,0,0\cdots}$ 形式特殊 *Schubert* 闭链, 那么它们更好用。在这种情况下, 我们可以利用约化得到一般的

Pieri 公式: 如果 $a = a, 0, 0 \cdots$, 那么, 任给 b 有

$$(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \sum_{\substack{b_i \leqslant c_i \leqslant b_{i-1} \\ \sum c_i = a + \sum b_i}} \sigma_c。$$

证明: 我们要证明, 对相应余维数的 σ_c,

$$\delta(a, b; c) = \begin{cases} 1, & \text{如果} b_i \leqslant c_i \leqslant b_{i-1}, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

设 $k = l(c)$, 我们有

$$\delta(a, b; c) = {}^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_{c_1 - c_k, \cdots, c_1 - c_2, 0}) \quad \text{在} G(k, k + c_1) \text{中。}$$

首先假定对某些 i 有 $c_i < b_{i-1}$。那么, 我们有

$$c_1 + b_{i-1} + (c_1 - c_i) \geqslant 2c_1 + 1,$$

并且, 应用 $\sigma = 0$, $\beta = i - 1$ 和 $\gamma = k - i + 1$ 的第二个公式, 我们得到,

$$\begin{aligned} \delta(a, b; c) &= {}^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_{b_1 - 1, \cdots, b_{i-1} - 1, b_i, \cdots} \cdot \sigma_{c_1 - c_k - 1, \cdots, c_1 - c_i - 1, c_1 - c_{i-1}, \cdots}) \\ &\qquad \text{在} G(k, k + c_1 - 1) \text{中} \\ &= \delta(a', b'; c') \end{aligned}$$

其中,

$$b' = b_1 - 1, \cdots, b_{i-1} - 1, b_i, \cdots$$

并且

$$c' = c_1 - 1, \cdots, c_{i-1} - 1, c_i, \cdots。$$

现在,

$$(b_i \leqslant c_i \leqslant b_{i-1} \quad \text{对所有} i) \Leftrightarrow (b'_i \leqslant c'_i \leqslant b'_{i-1} \quad \text{对所有} i)$$

并且当然有

$$b'_{i-1} - c'_i = b_{i-1} - c_i - 1 \geqslant 0。$$

因此我们可以从头假定, 对所有的 i, $c_i \geqslant b_{i-1}$。因为 $\sum c_i = a + \sum b_i$, 所以得到 $a \geqslant c_1$; 并且因此有三种情况:

1. 如果对某些 i, $c_i > b_{i-1}$, 那么, $a > c_1$, 且因此 $\delta(a, b; c) = 0$。

2. 如果对任意 i, $c_i < b_i$, 那么 $c_i \geqslant b_{i-1}$ 意味着 $b_i > b_{i-1}$, 即, 系列 b 不是非升的且 σ_b 取为空的; 所以 $\delta(a, b; c) = 0$。

3. 如果对所有 i, $b_i \leqslant c_i \leqslant b_{i-1}$, 那么得到, 对所有 i, $c_i = b_{i-1}$, 因此 $a = c_1$, $b_k = 0$, 应用 $\alpha = 1$ 且 $\beta = \gamma = k$ 的第一个约化公式, 我们有

$$\begin{aligned} \delta(a,b;c) &= {}^{\#}(\sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_{c_1-c_k,\cdots,c_1-c_2,0}) \quad G(k,k+c_1)\text{中} \\ &= {}^{\#}(\sigma_b, \sigma_{c_1-c_k,\cdots,c_1-c_2}) \qquad\quad G(k-1,k+c_1-1)\text{中} \\ &= {}^{\#}(\sigma_b \cdot \sigma_{c_1-b_k,\cdots,c_1-b_1}) \\ &= 1\text{。} \end{aligned}$$

证毕

关于 Schubert 闭链的最后结果是一个公式, 它把一般的 Schubert 闭链表示为特殊 Schubert 闭链 $\sigma_{b,0,\cdots}$ 中的多项式。

过程如下: 对任意 Schubert 闭链 $\sigma_{a_1,\cdots,a_d}$, 我们考虑下列闭链:

$$(*) \qquad \tilde{\sigma}_a = \sum_{j=1}^{d} (-1)^j \sigma_{a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1}-1,\cdots,a_d-1} \cdot \sigma_{a_j+d-j}\text{。}$$

注意, $\tilde{\sigma}_a$ 有象 σ_a 一样的维数。现在, 通过 Pieri 公式, 我们可以把求和 $(*)$ 中的每个相交写作 Schubert 闭链的求和。设 $\sigma_{c_1,\cdots,c_d}$ 是任意 Schubert 闭链; 如果 σ_c 出现在表达式中, 那么, 考虑整数系列

$$c_1 - 1, c_2 - 2, \cdots, c_d - d\text{。}$$

由 Pieri 公式, 这些数字中至多有一个处在 $(d+1)$ 个闭区间中的一个:

$$\begin{gathered} [a_1 - 1, n-k], \\ [a_2 - 2, a_1 - 2], \\ \vdots \\ [a_d - d, a_{d-1} - d], \\ [-d-1, a_d - d - 1], \end{gathered}$$

并且因此这些区间的一个正好不能包含一个整数 $c_i - i$。那么由此得到,

1. 如果没有整数 $c_i - i$ 处在区间 $[-d-1, a_d - d - 1]$ 中, 那么,

$$c_i - i \in [a_i - i, a_{i-1} - i],$$

并且 σ_c 只出现在求和 $(*)$ 的最后一项中。但是由于

$$c_i \geqslant a_i \quad \text{和} \quad \sum c_i = \sum a_i,$$

所以得到 $c = a$。因此, Schubert 闭链在 $(*)$ 中只出现一次, 系数为 $(-1)^d$。

2. 如果没有整数 $c_i - i$ 出现在区间 $[a_k - k, a_{k-1} - k]$ 中, 那么, 我们有

$$\begin{aligned} c_1 - 1 &\in [a_1 - 1, n - k], \\ &\vdots \\ c_{k-1} - k + 1 &\in [a_{k-1} - k + 1, a_k - k + 1], \\ c_k - k &\in [a_{k+1} - k - 1, a_k - k - 1], \\ &\vdots \\ c_d - d &\in [-d - 1, a_d - d - 1], \end{aligned}$$

即,

$$a_i \leqslant c_i \leqslant a_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, k-1,$$

且

$$a_{i+1} - 1 \leqslant c_i \leqslant a_i - 1, \quad i = k, \cdots, d。$$

在这种情况下, Schubert 闭链 σ_c 将在表达式 $(*)$ 中出现两次: 一次在第 k 项中, 一次在第 $(k-1)$ 项中。因为这两个都有相反的正负号, 所以在 $\tilde{\sigma}_a$ 的最终表达式不出现。

3. 如果区间 $[a_1 - 1, n - k]$ 未占据, 那么, 对每个 i 得到

$$c_i - i \in [a_{i+1} - i - 1, a_i - i - 1],$$

但是因此 $c_i \leqslant a_i - 1$, 并且由此 $\sum c_i < \sum a_i$, 所以 σ_c 不出现在 $(*)$ 中。

于是我们得到公式:

$$(**) \qquad (-1)^d \sigma_{a_1, \cdots, a_d} = \sum_{j=1}^{d} (-1)^j \sigma_{a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_d - 1} \cdot \sigma_{a_j + d - j}。$$

注意, 因为右边的每个因子的长度都 $< d$, 所以这已经意味着, σ_a 可被表示为特殊 Schubert 闭链 $\sigma_{b,0,\cdots}$ 中的多项式, 即,

Grassmann 流形 $G(k, n)$ 中的上同调环由特殊 Schubert 闭链类生成。

现在, 我们利用关系 $(**)$ 来证明 *Giambelli* 公式

$$\sigma_{a_1, \cdots, a_d} = \begin{vmatrix} \sigma_{a_1} & \sigma_{a_1+1} & \sigma_{a_1+2} & \cdots & \sigma_{a_1+d-1} \\ \sigma_{a_2-1} & \sigma_{a_2} & \sigma_{a_2+1} & \cdots & \sigma_{a_2+d-2} \\ \sigma_{a_3-2} & \sigma_{a_3-1} & \sigma_{a_3} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sigma_{a_d-d+1} & & \cdots & & \sigma_{a_d} \end{vmatrix}。$$

我们将用归纳法来证明它; 明显, 它对 $d = 1$ 是正确的。假设它对 $d - 1$ 成立; 沿着左边的

行用余因子展开, 行列式由下式给出

$$\sum(-1)^j\sigma_{a_j+d-j}\cdot\begin{vmatrix}\sigma_{a_1} & \cdots & \sigma_{a_1+d-2}\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{a_{j-1}-j} & \cdots & \sigma_{a_{j-1}+d-j}\\ \sigma_{a_{j+1}-j-2} & \cdots & \sigma_{a_{j+1}+d-j-2}\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{a_d-d+1} & \cdots & \sigma_{a_d-1}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \sum(-1)^j\sigma_{a_j+d-j}\cdot\sigma_{a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1}-1,\cdots,a_d-1}\\ &= \sigma_{a_1,\cdots,a_d},\end{aligned}$$

并且公式得证。 证毕

注意, Pieri 公式与 $(**)$ 公式一起给出了计算 Schubert 闭链的任意相交的方法。

Schubert 运算将经常出现在本书剩下的内容中——在簇的背景下; 现在, 我们给出其对枚举几何的初等问题的应用。可能最简单的非平庸的这种问题是: 在 $\mathbb{P}^3$ 中, 给出一般位置的四条直线 L_1, L_2, L_3, L_4, 有多少直线与它们都相交? 答案容易得到: 因为与 L_i 相交的直线集合就是 Schubert 闭链 $\sigma_1(L_i)$, 答案就是在 $G(2,4)$ 中的 σ_1 的四重自相交数目; 即,

$$\begin{aligned}\sigma_1^4 &= \sigma_1^2\cdot(\sigma_{1,1}+\sigma_2)\\ &= \sigma_1\cdot(2\sigma_{2,1})\\ &= 2。\end{aligned}$$

一般地, 与 $\mathbb{P}^{2n+1}$ 中一般位置的四个 $(n+1)$ 维超平面相交的直线的数目由 $G(2,2n+2)$ 中 σ_n 的四重自相交给出; 即,

$$\begin{aligned}(\sigma_n)^4 &= (\sigma_n^2)^2\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n}\sigma_{2n-i,i}\right)^2\\ &= n+1。\end{aligned}$$

用类似的思路, 与 $\mathbb{P}^4$ 中一般位置的六个 2 维平面相交的直线的数目由 $G(2,5)$ 中的 σ_1^6 给出; 有

$$\begin{aligned}\sigma_1^3 &= \sigma_1(\sigma_{1,1}+\sigma_2) = 2\sigma_{2,1}+\sigma_3,\\ \sigma_1^6 &= (2\sigma_{2,1}+\sigma_3)^2 = 4+1 = 5。\end{aligned}$$

万有丛

设 $\mathbb{C}^n \times G(k,n)$ 表示 $G(k,n)$ 上秩为 n 的平庸矢量丛。我们定义**万有子丛** $S \to G(k,n)$ 为 $\mathbb{C}^n \times G(k,n)$ 的子丛, 它在每个点 $\Lambda \in G(k,n)$ 上的纤维就是子空间 $\Lambda \in \mathbb{C}^n$。 S 明显是 $\mathbb{C}^n \times G(k,n)$ 的全纯子丛——显然, 在每个开集 $U_I \subset G(k,n)$ 上, $\Lambda \in U_I$ 的归一矩阵表示的行矢量给出 U_I 上 S 的一个标架; 相对于这些标架的转换函数在 $U_I \cap U_{I'}$ 中由 $g_{U_I U_{I'}} = \Lambda_I \cdot \Lambda_{I'}^{-1}$ 给出。商丛 $Q = \mathbb{C}^n/S$ 称为 $G(k,n)$ 上的**万有商丛**。注意, 在等式 $*: G(k,n) \to G(n-k,n)$ 下, $G(n-k,n)$ 上的万有子丛对应于 $G(k,n)$ 中万有商丛的对偶; 并且同样 $Q \to G(n-k,n)$ 拖回到对偶 $S^* \to G(k,n)$。特别注意, 万有子丛 $S \to G(1,n) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 就是前面提到的万有线丛。

现在, 设 $E \to M$ 是复流形 M 上秩为 k 的任意全纯矢量丛, $V \subset H^0(M, \mathscr{O}(E)$ 是整体全纯截面的 n 维矢量空间, 并且假定 V 中截面 σ 的值 $\{\sigma(x)\}_{\sigma \in V}$ 对所有的 $x \in M$ 张成 E_x。那么, 对每个 $x \in M$, 在 x 处等于零的截面 $\sigma \in V$ 的子空间 $\Lambda_x \subset V$ 是 $(n-m)$ 维子空间; 因此, 我们得到一个映射

$$\iota_V : M \to G(n-k, V) = G(k, V^*),$$

它就象线丛一样满足

$$E = \iota_V^* S^* \quad \text{和} \quad V = \iota_V^*(H^0(G(k,n), \mathscr{O}(S^*)))。$$

显然, 如果我们局域上选择 V 的一个基 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 和 E 的一个标架 $e_1, \cdots, e_k$, 并且写出

$$\sigma_i = \sum a_{i\alpha} e_\alpha,$$

那么, 用相应的等式 $G(n-k, V) \cong G(k, V^*)$ 的方式, 映射 ι_V 由

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

给出, 使得 ι_V 明显是全纯的。

就象在线丛的情况下一样, 我们有嵌入定理:

定理: *对任意紧致复流形 M, $L \to M$ 是正定线丛且 $E \to M$ 是全纯矢量丛, 那么, 对足够大的 m, 映射 $\iota_{E \otimes L^m}$ 是一个嵌入。*

证明: 对我们而言, 大部分工作已经在 Kodaira 嵌入定理中完成: 因为 M 是正定线丛, 所以我们可以取代数簇 $M \subset \mathbb{P}^N$ 和超平面丛 $L \to M$。

现在, 如果对所有的 $x, y \in M$, $\iota_{E \otimes L^m}$ 是一对一的, 那么限制映射

$$(*) \qquad H^0(M, \mathscr{O}(E \otimes L^m)) \to (E \otimes L^m)_x \oplus (E \otimes L^m)_y$$

是满射。类似地, 我们有象对线丛定义的一样的微分映射

$$(**) \qquad H^0(M, \mathscr{I}_x(E \otimes L^m)) \to T_x^{*\prime} \otimes (E \otimes L^m)_x;$$

如果这个映射是满射, 那么 $\iota_{E\otimes L^m}$ 在 x 是光滑的。在 Kodaira 嵌入定理的证明中使用的紧致性讨论再次保证: 为了证明结论, 只需对 x 和 y 的任意特殊选择, 上述两个映射对足够大的 m 是满射。

我们通过 M 的维数上的归纳法来进行证明。任给 $x,y\in M$, 考虑包含 x 和 y 的 $M\subset\mathbb{P}^N$ 的超平面截面的线性系: 由 Bertini 定理, 这个系的一般运算在系的基轨迹 $\{x,y\}$ 之外是光滑的, 并且容易得到, 除非 M 是满足 $T_x(M)=T_y(M)\subset\mathbb{P}^N$ 的曲线(这种情形我们总可以通过不同地嵌入 M 来避免), 系的一般运算在 x 和 y 也是光滑的。因此, 我们可以找到包含 x 和 y 的 M 的光滑超平面截面 $V=H\cap M$。考虑序列

$$0\to\mathscr{O}_M(E\otimes L^{m-1})\to\mathscr{O}_M(E\otimes L^m)\to\mathscr{O}_V(E\otimes L^m)\to 0。$$

由定理 B, 存在 m_1 使得对 $m>m_1$, $H^1(M,\mathscr{O}(E\otimes L^{m-1}))=0$, 从而限制映射

$$H^0(M,\mathscr{O}(E\otimes L^m))\to H^0(V,\mathscr{O}(E\otimes L^m))$$

是满射。另一方面, 由归纳法, 存在 m_2 使得对 $m>m_2$,

$$H^0(V,\mathscr{O}_V(E\otimes L^m))\to(E\otimes L^m)_x\oplus(E\otimes L^m)_y$$

是满射。对 $m>m_0=\max(m_1,m_2)$, 那么, 映射 $(*)$ 是满射。

类似地, 对每个 $T_x^{*\prime}$ 的余切矢量 $\{\omega_\alpha\}$ 的生成集合, 我们可以找到经过 x 的 M 的光滑超平面截面 V_α, 使得 ω_α 不在自然投影映射 $T_x^{*\prime}(M)\to T_x^{*\prime}(V_\alpha)$ 的核中。那么, 由归纳法, 我们可以找到 m_α 使得对 $m>m_\alpha$, 微分映射

$$H^0(V_\alpha,\mathscr{I}_x(E\otimes L^m))\to T_x^{*\prime}(V_\alpha)\otimes(E\otimes L^m)_x$$

是满射。同样, 从序列

$$0\to\mathscr{O}_M(E\otimes L^{m-1})\to\mathscr{I}_{x,M}(E\otimes L^m)\to\mathscr{I}_{x,V_\alpha}(E\otimes L^m)\to 0,$$

我们得到, 象以前一样, 对 $m>m_i$,

$$H^0(M,\mathscr{I}_x(E\otimes L^m))\to H^0(V_\alpha,\mathscr{I}(E\otimes L^m))$$

是满射。因此, 对 $m>m_0'=\max(m_1,m_\alpha)$, 对所有的 α, 我们有

$$\begin{array}{ccc} H^0(M,\mathscr{I}_x(E\otimes L^m)) & \xrightarrow{d_x} & T_x^{*\prime}(M)\otimes(E\otimes L^m)_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(V_\alpha,\mathscr{I}_x(E\otimes L^m)) & \xrightarrow{d_x} & T_x^{*\prime}(V_\alpha)\otimes(E\otimes L^m)_x, \end{array}$$

即映射 $(**)$ 是满射。

Plücker 嵌入

我们通过讨论射影空间中 Grassmann 流形 $G(k,n)$ 的经典 Plücker 嵌入来结束本节; 它将阐明 Kodaira 嵌入定理和周定理。 $G(k,n)$ 上嵌入线丛将是 $L=\det S^*=\det Q$。通过引入适当的度量, L 可以被看作是正定的, 这个度量用类似于射影空间中 Fubini-Study 度量的方式得到正定曲率; 然而, 我们不考虑它, 我们将直接给出 Plücker 嵌入。*Plücker* 映射

$$p:G(k,n)\to\mathbb{P}(\wedge^k\mathbb{C}^n)=\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

直接把 k 维平面 $\Lambda=\mathbb{C}\{v_1,\cdots,v_k\}\subset\mathbb{C}^n$ 变到多重矢量 $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$。显然, 由 $\wedge^k\mathbb{C}^n$ 的基 $\{e_I=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\}_{\#I=k}$ 的方式, 这个映射由

$$\Lambda\mapsto[\cdots,|\Lambda_I|,\cdots]$$

给出, 即, 映射的齐次坐标就是 Λ 的矩阵表示的所有 $k\times k$ 子式 Λ_I 的行列式 $|\Lambda_I|$。由此得到, (1) p 是全纯的, (2) p 把每个形式的 Schubert 闭链

$$\sigma_1(V)=\{\Lambda\in G(k,n):\dim(\Lambda\cap V_{n-k})\geqslant 1\}$$

变成 $p(G(k,n))\subset\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ 的超平面截面。对 $\Lambda\neq\Lambda'\in G(k,n)$, 我们总能找到一个 $(n-k)$ 维平面 V_{n-k} 使得 $\Lambda\cap V_{n-k}\neq(0)$, $\Lambda'\cap V_{n-k}=(0)$, 所以 p 是一对一的; 并且因为在每个空间 $U_I=\{\Lambda:|\Lambda_I|\neq 0\}$ 中, 上述 $G(k,n)$ 上的欧氏坐标看起来是

$$a_{jk}=\frac{|\Lambda_{I-j+k}|}{|\Lambda_I|},$$

所以映射 p 有非零微分。因此 Plücker 嵌入是一个嵌入。

现在, 我们将确定定义 $\mathbb{P}(\wedge^kV)$ 中 $G(k,V)$ 的 Plücker 像的方程。我们所要求的是多重矢量 $\Lambda\in\wedge^kV$ 可分解的条件, 即, 形式为

$$\Lambda=v_1\wedge\cdots\wedge v_k。$$

为此, 我们提出一个更一般的问题, 确定最小线性子空间, 使得 Λ 在

$$\wedge^kW\to\wedge^kV$$

的像中。任给 $\dim V=l$, 那么 $l\geqslant k$, 当且仅当 Λ 可分解时等号成立。

回想一下对 $v^*\in V^*$, 约缩算子

$$i(v^*):\wedge^kV\to\wedge^{k-1}V$$

对所有的 $\Xi\in(\wedge^{k-1}V)^*\cong\wedge^{k-1}V^*$ 定义为

$$\langle i(v^*)\Lambda,\Xi\rangle=\langle\Lambda,v^*\wedge\Xi\rangle。$$

伴随于 Λ, 我们有线性空间

$$\Lambda^\perp=\{v^*\in V^*:i(v^*)\Lambda=0\}\subset V^*$$

和

$$W = \mathrm{Ann}(\Lambda^{\perp}) \subset V。$$

引理: *W 是 V 的最小子空间, 使得 Λ 在 $\wedge^k W \to \wedge^k V$ 的像中。*

证明: 设 $w_1, \cdots, w_l$ 是 W 的基, 通过 $u_{l+1}, \cdots, u_n$ 把它完备化到 V 的基。用 $\{w_i^*, u_i^*\}$ 表示 V^* 的对偶基。设 $U = \mathbb{C}\{u_{l+1}, \cdots, u_l\}$, 直和分解 $V = W \oplus U$ 诱导出

$$\wedge^k V \cong \wedge^k W \otimes (\wedge^{k-1} W \otimes U) \oplus (\wedge^{k-2} W \otimes \wedge^2 U) \oplus \cdots。$$

我们想证明, Λ 处在第一个因子中。把第二个因子中的 Λ 的分量写作 $\sum_{\alpha=l+1}^{n} \Lambda_\alpha \otimes U_\alpha$, 其中, $\Lambda_\alpha \in \wedge^{k-1} W$。因为

$$i(u_\alpha^*) : \wedge^{k-m} W \otimes \wedge^m U \to \wedge^{k-m} W \otimes \wedge^{m-1} U$$

并且 $i(u_\alpha^*)\Lambda = 0$, 所以我们导出所有 $\Lambda_\alpha = 0$。类似地, $\wedge^{k-w} W \otimes \wedge^m U (m \geqslant 2)$ 中的 Λ 的其它因子是零, 因此 $\Lambda \in \wedge^k W$。容易知道, W 是最小的这样的子空间。 证毕

我们现在定义

$$W' = \{w \in W : w \wedge \Lambda = 0\}。$$

如果 Λ 可分解, 那么显然 $W' = W$。相反, 如果 Λ 不可分解使得 $\dim W = l > k$, 那么, 因为配对 $\wedge^k W \otimes \wedge^{l-k} W \to \wedge^l W$, 所以我们导出, $W' \neq W$。因此当且仅当 $W' = W$ 时 Λ 可分解。我们现在通过对偶把这个条件用两种方法来表示。第一种, 我们利用算子

$$i(\Xi) : \wedge^k V \to V^*,$$

对 $\Xi \in \wedge^{k+1} V^*$, 它由

$$\langle i(\Xi)\Lambda, v\rangle = \langle \Xi, \Lambda \wedge v\rangle$$

对所有的 $v \in V$ 来定义。我们看到, 由 $\Lambda^{\perp}$ 的定义, 对 $v \in W$, 左边只依赖于自然映射

$$\wedge^{k+1} V^* \to \wedge^{k+1} \left(\frac{V^*}{\Lambda^{\perp}}\right) \cong \Lambda^{k+1} W^*$$

下 Ξ 的像。因此, 对所有 $w \in W$ 的条件 $\Lambda \wedge w = 0$ 等价于对所有 Ξ, $i(\Xi)\Lambda \in \Lambda^{\perp}$, 它接着等价于

$$(*) \qquad i(i(\Xi)\Lambda)\Lambda = 0 \quad \text{对所有}\Xi \in \wedge^{k+1} V^*。$$

$(*)$ 的左边给出在 $p(G(k, V))$ 的齐次坐标 Λ_I 中的 $\binom{n}{k+1}$ 二次形式; 把它们设为零给出经典的*Plücker* 关系。总之,

在 Plücker 嵌入 $p : G(k, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ 下 Grassmann 流形的像被由 $(*)$ 给出的二次对象的线性系得到。

另外, 我们可以把 W 表征为在映射

$$\Xi \to i(\Xi)\Lambda, \quad \Xi \in \wedge^{k-1}V^*$$

下

$$\wedge^{k-1}V^* \to V$$

的像。那么, 条件 $W = W'$ 等价于

$$(**) \qquad (i(\Xi)\Lambda) \wedge \Lambda = 0 \quad \text{对所有}\Xi \in \wedge^{k-1}V^*。$$

例如, 假定

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \wedge e_j, \quad \lambda_{ij} + \lambda_{ji} = 0,$$

是双矢量。因为对 $v^* \in V^*$,

$$(i(v^*)\Lambda) \wedge \Lambda = \frac{1}{2} i(v^*)(\Lambda \wedge \Lambda),$$

我们可以重新把条件 $(**)$ 写作

$$\Lambda \wedge \Lambda = 0。$$

当 $n = 4$ 时, 我们得到单个方程

$$\lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{23} = 0,$$

它表示 $\Lambda \in \mathbb{P}(\wedge^2\mathbb{C}^4) \cong \mathbb{P}^5$ 可分解的条件。换句话说, $G(2,4)$ 自然实现为 $\mathbb{P}^5$ 中的非奇异二次超曲面。在最后一章我们将了解更多这方面的知识。

第二章 Riemann 曲面和代数曲线

本章的主题是代数曲线的外在射影几何与 Riemann 曲面的内蕴结构之间的互相作用。这个课题最初是用外在的方式来研究, 随着抽象 Riemann 曲面概念的引入, 它在观念上经历了根本的转变; 但是, 这里介绍的代数曲线理论的主要情况在每个方法中都一样。本章的大部分结果——如果没有证明的话——在 19 世纪就已经得到了。

在第一节中, 我们改进在维数为 1 的情况下的 Kodaira 嵌入定理。接着我们讨论 Riemann 曲面之间映射的局域结构, 并且利用它们来证明 Riemann–Hurwitz 公式和亏格公式。我们建议读者从第二节开始, 在有需要时再回到第一节查阅。

在第二节中, 我们介绍了 Abel 积分理论, 证明了 Abel 定理及其逆定理。这个定理可能在椭圆曲线的情况下最容易理解——它最初的确是在那里被发现的——并且用这方面的讨论来结束本节。

在第三节我们转到曲线上的线性系理论。当然, 这里的基本结果是 Riemann–Roch 公式。接着, 我们引入典范曲线, 它是任意非超椭圆 Riemann 曲面内蕴定义的射影模型。典范曲线的重要性来自 Riemann–Roch 公式的几何解释; 它的全部重要性将继续在本章其余的部分显露出来。首先, 我们用射影空间中关于给定次数的曲线亏格的 Castelnuovo 上限来研究特殊线性系; 接着, 在讨论超椭圆曲线和 Riemann 计数——它提示我们, Riemann 曲面依赖于参数——后, 我们将开始解决 Brill 和 Norther 的补充问题。

第四和第五节转到曲线外在的情况。在第四节, 我们证明了一般 Plücker 公式和平面曲线的 Plücker 公式。在这些结果之间有一个根本的不同点: 一般 Plücker 公式可应用到任意维数射影空间中的曲线, 但是只得到曲线的局域特征; 而平面曲线的公式可得到诸如双切点和双重点这样的整体认识, 但只应用在 $\mathbb{P}^2$ 中的曲线。这个表面上的缺陷将在下节中部分地被弥补, 在那里, 我们将引入对应这个有效的计算方法, 并且把空间曲线的几何公式作为一个应用推导出来。在这两节中, 把射影几何的公式应用到典范曲线就得到关于 Riemann 曲面的内蕴结构的结果: 在第四节, 我们得到 Weierstrass 点的数目, 在第五节, 我们解决了一些 Brill–Noether 问题的特殊情形。

在本章的最后两节, 我们回来研究伴随于紧致 Riemann 曲面的 Jacobi 簇。为此, 我们在第六节给出 Abel 簇理论的初等知识; 这里的主题是得到复环面情况下的 Kodaira 嵌入定理。在第七节, 我们专门讨论曲线的 Jacobi 簇的问题。通过 Riemann 的两个美妙的定理, 我们搞清了 Jacobi 簇的几何怎样与曲线上的特殊线性系密切相关; 由此我们最后可以证明关于 Brill–Noether 定理的一些结果。本章最后介绍了 Torelli 的定理, 它来自 Andreotti。

1. 预备知识

Riemann 曲面的嵌入

设 S 是紧致 Riemann 曲面。在本章我们都假定 S 是连通的。如果 ds^2 是 S 上的任意度量, 其伴随 $(1,1)$ 形式为 ω, 那么, $d\omega$ 的次数为 3, 所以平庸地等于零; 因此, S 上的任意度量是 Kähler 度量。的确, 因为任意度量的 $\bar{\partial}$-Laplace 算子都与型的分解可以交换, 所以, 当在局域坐标 $z = x + \sqrt{-1}y$ 下写作

$$\varphi = pdx + qdy = \alpha dz + \beta d\bar{z}$$

时, 我们得到 φ 是调和的当且仅当 $\varphi^{1,0} = \alpha dz$ 是全纯的, 且 $\varphi^{0,1} = \beta\bar{z}$ 是反全纯的。这种情况出现当且仅当

$$\partial\varphi = \bar{\partial}\varphi = 0,$$

或者等价地, 当且仅当

$$d\varphi = d^c\varphi = 0。$$

如果 $d\varphi = 0$, 那么, 在局域上, 对某些 C^∞ 函数有 $\varphi = df$; 我们得到

$$d^c\varphi = d^c df = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy,$$

即, φ 是调和的当且仅当 f 在通常单复变量的意义上是调和的。特别是, 我们发现调和空间 $\mathscr{H}^1(S)$ 不依赖于度量的选择。

现在, 设 ds^2 是伴有 $(1,1)$ 形式 ω 的度量, 增加一个常数因子使得

$$\int_S \omega = 1。$$

$[\omega] \in H^2_{\mathrm{DR}}(S)$ 是整上同调类, 并且由 Kodaira 嵌入定理得到, S 可以被嵌入射影空间 $\mathbb{P}^N$。就象在嵌入定理的讨论中提出的那样, 对 Riemann 曲面, 可以得到定理的更准确的表述和更简单的证明, 我们在这里给出它们。

设 $L \to S$ 是全纯线丛。回想一下, L 的次数的定义为由 S 的自然定向给出的在恒等式 $H^2(S,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 下在第一陈类 $c_1(L) \in H^2(S,\mathbb{Z})$。如果对

$$D = \sum a_i p_i \in \mathrm{Div}(S)$$

有 $L = [D]$, 那么,

$$\deg L = \sum a_i。$$

正如我们已经知道的那样, 只有当 $c_1(L) \geqslant 0$ 时, 即当

$$\deg L < 0 \Rightarrow H^0(S, \mathscr{O}(L)) = 0$$

时, L 才有非平庸的全纯截面。另一方面, 因为对应于 $+1$ 的 $H^2(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元由正定形式表示, 所以有

$$L\text{正定} \Leftrightarrow \deg L > 0。$$

因此, 如果 $\deg L > \deg K_S$, 那么, $L \otimes K_S^*$ 是正定的, 并且由 Kodaira 消没定理得到,

$$H^1(S, \mathscr{O}(L)) = H^1(S, \Omega^1(L + K_S^*)) = 0。$$

另外, 这个结果也可以从 Kodaira–Serre 对偶得到:

$$\begin{aligned}\deg L > \deg K_S \quad &\Rightarrow \quad \deg(K_S \otimes L^*) < 0 \\ &\Rightarrow \quad H^1(S, \mathscr{O}(L)) \cong H^0(S, \mathscr{O}(K_S \otimes L^*)) = 0。\end{aligned}$$

现在, 对任意 $p \in S$, 考虑恰当序列

$$0 \to \mathscr{O}(L - p) \to \mathscr{O}(L) \xrightarrow{r_p} L_p \to 0。$$

如果 $\deg(L - p) = \deg L - 1 > \deg K_S$, 那么, $H^1(S, \mathscr{O}(L) - p) = 0$, 并且得到

$$H^0(S, \mathscr{O}(L)) \to L_p \to 0,$$

即, 次数大于 $\deg K_s + 1$ 的线丛的完备线性系没有基点。还有, 如果 $\deg L > \deg K_S + 2$, 那么, 从恰当序列

$$0 \to \mathscr{O}(L - p - q) \to \mathscr{O}(L) \xrightarrow{r_{p,q}} L_p \oplus L_q \to 0,$$

$$0 \to \mathscr{O}(L - 2p) \to \mathscr{O}(L) \xrightarrow{d_p} T_p'^* \otimes L_p \to 0,$$

和消没定理

$$H^1(S, \mathscr{O}(L - p - q)) = H^1(S, \mathscr{O}(L - 2p)) = 0,$$

得到, L 的完备线性系给出一个嵌入 $\iota_L : S \to \mathbb{P}^N$。

总之, 我们得到

1. $\deg L < 0 \Rightarrow H^0(S, \mathscr{O}(L)) = 0$。
2. $\deg L > \deg K_S \Rightarrow H^1(S, \mathscr{O}(L)) = 0$。
3. $\deg L > \deg K_S + 2 \Rightarrow \iota_L : S \to \mathbb{P}^N$ 有明确的定义并且是一个嵌入。

从现在开始, 紧致 *Riemann* 曲面和光滑代数曲线或简称曲线这两个用语可以非常贴切地互换。当光滑代数曲线可以看作具有嵌入的附加结构时——即, 当看作一个 Riemann 曲面以及线丛 $L \to S$ 和子空间 $E \subset H^0(S, \mathscr{O}(L))$ 时, 这不是那么确切, 但是希望别混淆了。重要的是可以交替地考虑抽象的解析对象——紧致 Riemann 曲面——和代数对象——$\mathbb{P}^N$ 中多项式的零点了; 这暗含在两个术语的使用当中了。

就象我们在第一章第四节得到的那样, 代数曲线 $S \subset \mathbb{P}^N$ 的弦的簇 $C(S)$ 是 $\mathbb{P}^N$ 中维数 $\leqslant 3$ 的闭子簇。从点 $p \notin C(S)$ 到任意超平面 $H \subset \mathbb{P}^N$ 的投影给出 S 在 $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$ 中的一个嵌入; 因此, 任意曲面可以光滑地嵌入 3 维空间 $\mathbb{P}^3$。一般地, 我们不能把曲线嵌入 $\mathbb{P}^2$ 中。但是, 给定一个光滑曲线 $S \subset \mathbb{P}^3$, 我们可以找到一个点 $p \in \mathbb{P}^3$, 它不处在 $\mathbb{P}^3$ 中 S 的任意切线上, 也不处在与 S 相交多于两点的直线上, 也不处在与 S 相交于两点且与切线相交的直线上。于是, 投影映射 $\pi_p|_S : S \to \mathbb{P}^2$ 将有处处非零的微分, 并且在孤立点至多有 $2-1$

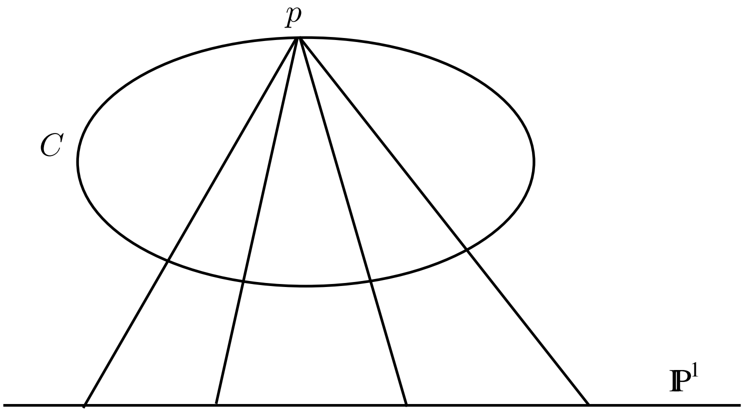


Figure 1

投影; 像 $\pi_p(S) \subset \mathbb{P}^2$ 将是一条平面代数曲线, 它的唯一奇异点是普通二重点或结点——即, 在一个奇异点附近, $\pi_p(S)$ 看起来象两个相交于切线不同的点处的光滑解析弧。(这个讨论将在本章第四节更准确地讨论。)

还要注意, 对曲线 $S \subset \mathbb{P}^N$ 和光滑点 $p \in S$, 通过把 p 变成它的切线与 $\mathbb{P}^{N-1}$ 的交点, 到超平面的投影映射 $\pi_p : S - \{p\} \to \mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ 可以连续地(从而全纯地)扩展到所有 S 上。一般超平面 $H \subset \mathbb{P}^{N-1}$ 与像 $\pi_p(S)$ 的交集就是超平面 $\overline{H,p} \subset \mathbb{P}^N$ 与 $S - \{p\}$ 的交集, 使得对 $p \in S$, 得到

$$\deg \pi_p(S) = \deg S - 1。$$

这里最简单的情况就是从平面二次曲线 C 的一点到一条直线上的立体投影。(见图1。)

Riemann–Hurwitz 公式

我们从初等拓扑学知道, 紧致 Riemann 曲面 S 只有一个拓扑不变量, 我们可以把它取为亏格

$$g(S) = \frac{b_1(S)}{2} = \frac{-\chi(S)+2}{2},$$

或取为一般的"手柄的数目"。

从第一章第二节我们得到, 全纯切丛 $T'(S) = K_S^*$ 上度量的曲率形式就是度量的 Guass 曲率乘体积形式再除 $\sqrt{-1}$。那么, 由经典的 Guass–Bonnet 定理得到:

$$\deg K_S = -\chi(S) = 2g - 2。$$

这是 *Riemann–Hurwitz* 公式的一种形式, 可以直接证明如下: 设 $f : S \to S'$ 是紧致 Riemann 曲面 S 和 S' 之间的映射。对同调中的诱导映射 $f_* : H_2(S,\mathbb{Z}) \to H_2(S',\mathbb{Z})$, 得到

$$f_*([S]) = n \cdot [S'];$$

整数 n 称为映射的叶数或次数。对任意点 $p \in S'$, 设 Θ 是伴随于除子 (p) 的线丛 $[(p)]$ 的曲率形式。那么, $f^*\Theta$ 是 S 上线丛 $f^*[(p)] = [f^*(p)]$ 的曲率形式, 并且我们从第一章第二节的

命题得到,

$$\deg f^*(p) = \int_S f^*\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right) = n\int_{S'}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right) = n,$$

因此,考虑除子方面的多重性后, 映射 f 使得所有的 $p \in S'$ 正好出现 n 次。

对任意 $p \in S$, 我们可以找到 S 中 p 附近的局域坐标 z 和 S' 中 $f(p)$ 附近的局域坐标 w, 使得映射 f 在局域上由

$$w = z^v$$

给出。数目 v 称为映射 f 在 p 处的**分歧指标**; 如果 $v(p) > 1$, 那么 p 称为**分支点**。映射 f 的**分支轨迹**取为 S 上的除子

$$B = \sum_{p\in S}(v(p)-1)\cdot p,$$

或者取为除子在 S' 上的像

$$B' = \sum_{p\in S}(v(p)-1)\cdot f(p)。$$

对任意点 $p \in S'$, 我们可以写出

$$\begin{aligned} f^*(p) &= \sum_{q\in f^{-1}(p)} v(q)\cdot q, \\ \deg f^*(p) &= n = \sum_{q\in f^{-1}(p)} v(q), \end{aligned}$$

其中求和是在不同点上进行。于是, 它为我们提供了映射 f 的图像: 不在 f 的分支轨迹上时, f 是一个覆盖映射; 在分歧指标为 k 的分支点 $p \in S$ 处, 覆盖的 k 个叶叠合在一起。

用 f 的叶数目和分歧化的方式, 我们可以把 S 的亏格与 S' 的亏格联系起来。取 S' 的一个三角剖分, 其中分支轨迹的每个点都是顶点。因为不在 B 处时 f 是覆盖映射, 那么我们可以取 S 的一个三角剖分, 它的开胞腔就是在我们的 S' 的三角剖分中开胞腔逆像的连通分量。那么, 如果 c_0, c_1, c_2 分别表示 S' 中 $0-, 1-$ 和 $2-$胞腔的数目, 我们将得到 S 中的 $n\cdot c_1$ 个 $1-$胞腔和 $n\cdot c_2$ 个 $2-$胞腔。因为对任意 $p \in S'$ 有

$$\sum_{q\in f^{-1}(p)} v(q) = n,$$

所以我们还得到不同点的数目:

$$^\#(f^{-1}(p)) = n - \sum_{q\in f^{-1}(p)}(v(q)-1)。$$

因此, 在我们的 S 的三角剖分中顶点的数目是

$$n\cdot c_0 - \sum_{q\in S}(v(q)-1),$$

和 Euler 示性数为

$$\begin{aligned}\chi(S) &= n\cdot c_2 - n\cdot c_1 + n\cdot c_0 - \sum_{q\in S}(v(q)-1)\\ &= n\cdot\chi(S') - \sum_{q\in S}(v(q)-1),\end{aligned}$$

所以,

$$g(S) = n\cdot(g(S')-1)+1+\frac{1}{2}\sum_{q\in S}(v(q)-1)。$$

我们还可以把 S 的典范丛与 S' 的典范丛联系起来。设 ω 是 S' 上整体亚纯 1 形式, 局域上写作

$$\sigma = \frac{g(w)}{h(w)}dw。$$

对分歧指标为 v 的任意点 $p\in S$, 我们可以找到中心在 p 周围的 S 上的局域坐标 z, 并且 f 为

$$w = z^v。$$

于是,

$$\begin{aligned}f^*\omega &= \frac{g(z^v)}{h(z^v)}dz^v\\ &= v\cdot z^{v-1}\cdot\frac{g(z^v)}{h(z^v)}\cdot dz,\end{aligned}$$

因此,

$$\mathrm{ord}_p(f^*\omega) = v\cdot\mathrm{ord}_{f(p)}(\omega)+(v-1)。$$

它暗含了 S 上的除子方程

$$(f^*\omega) = f^*(\omega)+\sum_{p\in S}(v(p)-1)\cdot p,$$

即,

$$\begin{aligned}K_S &= f^*K_{S'}+B,\\ \deg K_S &= n\deg K_{S'}+\sum_{p\in S}(v(p)-1)。\end{aligned}$$

现在, 任意紧致 Riemann 曲面 S 都允许一个到 $\mathbb{P}^1$ 的全纯映射: 如果 $f\in\mathscr{M}(S)$ 是任意整体亚纯函数, 对互质的 g,h 在局域上写作 g/h, 那么, f 通过 $p\mapsto[g(p),h(p)]$ 给出了从 S 到 $\mathbb{P}^1$ 的一个映射。设 $f:S\mapsto\mathbb{P}^1$ 就是这样的映射; 在 $\mathbb{P}^1$ 上, 我们得到,

$$\chi(\mathbb{P}^1) = 2 = -\deg K_{\mathbb{P}^1},$$

并且因此得到

$$\begin{aligned}\chi(S) &= n\cdot\chi(\mathbb{P}^1)-\sum_{p\in S}(v(p)-1)\\ &= -n\cdot\deg K_{\mathbb{P}^1}-\sum_{p\in S}(v(p)-1)\\ &= -\deg K_S。\end{aligned}$$

因此, 对任意 S,

$$\deg K_S=-\chi(S)=2g-2,$$

并且得到 Riemann–Hurwitz 公式。

有时候, 我们的 Riemann–Hurwitz 公式指下面任意一种形式:

$$\begin{aligned}\deg K_S &= 2g-2,\\ \chi(S) &= n\chi(S')-\sum_{q\in S}(v(q)-1),\\ K_S &= f^*K_{S'}+B。\end{aligned}$$

现在, 对紧致 Riemann 曲面之间的映射还有两个结果: 首先, 考虑多重性后, f 的分支点的数目总是偶数; 其次, 如果 f 不是常数, 那么 $g(S)\geqslant g(S')$。后一个结果也来自这样的事实: 亏格为 g 的 Riemann 曲面在它上面正好有 g 个线性独立的全纯 1 形式; 如果 $f:S\to S'$ 不是常数, 容易得到 $f^*:H^0(S',\Omega^1_{S'})\to H^0(S,\Omega^1_S)$ 是单射, 并且因此得到 $g(S)\geqslant g(S')$。

亏格公式

在这里, 我们将给出**亏格公式**的三个证明, 这个公式用光滑平面曲线的次数的方式给出了其亏格。

首先是拓扑方面的讨论。假定 $S\subset\mathbb{P}^2$ 是次数为 d 的光滑曲线, 在 $\mathbb{P}^2$ 上作为齐次多项式 $F(Z_0,Z_1,Z_2)$ 的零点轨迹而得到。用 $C^2\subset\mathbb{P}^2$ 上欧氏坐标 $z_1=Z_1/Z_0, z_2=Z_2/Z_0$ 的方式, 方程为

$$f(z_1,z_2)=F(1,z_1,z_2)。$$

选择不在 S 上的一个点 $p\in\mathbb{P}^2$ 和不包含 p 的一条直线 H; 在进行一次坐标的线性变化后, 我们可以得到

$$p=[0,0,1],\qquad H=(Z_2=0);$$

我们还可以假定在无穷远的直线 $(Z_0=0)$ 与 S 不相切。

现在, 考虑从 p 到 H 的投影给出的映射 $\pi_p:S\to\mathbb{P}^1$。在 $(\partial f/\partial z_2)(q)\neq 0$ 的点 $p\in S$ 附近, z_1 起 S 上局域坐标的作用, 因此映射不是分歧的; 如果 $(\partial f/\partial z_2)(q)=0$, 那么, $(\partial f/\partial z_1)(q)\neq 0$, 并且在取 z_2 为 q 附近 S 上的局域坐标和取 $z_1=z_1(z_2)$ 为 z_2 的函数后, 我们可以写出

$$f(z_1(z_2),z_2)\equiv 0,$$

因此由链法则得到, 在 S 上有

$$\frac{\partial f}{\partial z_2}+\frac{\partial f}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial z_2}\equiv 0。$$

因此, 在 q 处 $\partial z_1/\partial z_2$ 等于零的次数(即, q 处映射 π_p 的分歧指标 $v(q)$ 减去 1)等于 $q\in S$ 处 $\partial f/\partial z_2$ 的零点的次数(即 S 与曲线 $(\partial f/\partial z_2=0)$ 在 q 处的相交多重数)。$(\partial f/\partial z_2=0)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d-1$ 的曲线, 并且因此它与 S 的相交数为 $d(d-1)$; 因为 $S\cap(\partial f/\partial z_2=0)$ 的所有点处在有限平面 $(Z_0\neq 0)$ 中, 所以得到

$$\sum(v(q)-1)=d(d-1)。$$

现在, 在 $H_2(\mathbb{P}^2,\mathbb{Z})$ 中, $[S]=d\cdot[H]$, 因此, 投影映射 π_p 的叶数是 d; 由 Riemann–Hurwitz 公式得到

$$\begin{aligned}\chi(S) &= d\cdot\chi(\mathbb{P}^1)-\sum_{q\in S}(v(q)-1)\\ &= 2d-d(d-1),\end{aligned}$$

并且因此得到

$$\begin{aligned}g(S) &= \frac{2-\chi(S)}{2}\\ &= \frac{(d-1)(d-2)}{2}。\end{aligned}$$

得到这个公式的第二种方法是通过第一章第二节的从属公式。它给出了

$$\begin{aligned}K_S &= K_{\mathbb{P}^2}|_S\otimes N_S\\ &= (K_{\mathbb{P}^2}+S)|_S。\end{aligned}$$

现在, 从截面 $K_{\mathbb{P}^2}=-3H$ 和 $S=dH$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上得到 $K_{\mathbb{P}^2}+S=(d-3)H$。因此,

$$\begin{aligned}\chi(S) &= -\deg K_S\\ &= -^{\#}(S\cdot(d-3)H)=-d(d-3),\end{aligned}$$

并且有

$$g(S)=\frac{2-\chi(S)}{2}=\frac{(d-1)(d-2)}{2}。$$

计算 $g(S)$ 的第三种方法是通过 Poincaré 留数对偶。回想(第147页)一下, 在 $\mathbb{P}^2$ 上, 对 $\mathbb{P}^2-S$ 上全纯且沿着 S 有一个极点的亚纯 2 形式 ω, 并且把它写作

$$\omega=g(z_1,z_2)\frac{dz_1\wedge dz_2}{f(z_1,z_2)},$$

那么, Poincaré 留数 $R(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} R(\omega) &= -g(z_1,z_2)\frac{dz_1}{(\partial f/\partial z_2)(z_1,z_2)} \\ &= g(z_1,z_2)\frac{dz_2}{(\partial f/\partial z_1)(z_1,z_2)}。\end{aligned}$$

再回想一下, 在这种情况下, Poincaré 留数映射给出一个同构

$$H^0(\mathbb{P}^2,\Omega^2(S))\to H^0(S,\Omega_S^1)。$$

现在, 考虑如上给出的 $\omega\in H^0(\mathbb{P}^2,\Omega^2(S))$。形式 $dz_1\wedge dz_2$ 扩张到 $\mathbb{P}^2$ 上的亚纯 2 形式; 因为 $K_{\mathbb{P}^2}=-3H$ 且 $dz_1\wedge dz_2$ 在 $\mathbb{P}^2-L$ 上是非零全纯的, 因此, $dz_1\wedge dz_2$ 必须有一个沿着 L 的 3 阶极点。类似地, f 扩张到 $\mathbb{P}^2$ 上的亚纯函数, 并且因为 f 是一个多项式, 在 $\mathbb{P}^2-L$ 中沿着次数为 d 的曲线有一个单零点, 所以沿着 L 它必然有一个次数为 d 的极点。因此 g 必须扩张到沿着 L 有次数 $\leqslant d-3$ 的一个极点的亚纯函数, 即, g 必须是 z_1,z_2 的次数 $\leqslant d-3$ 的多项式。因此, *对次数 $\leqslant d-3$ 的多项式 g, S 中的全纯 1 形式正好是下列微分*:

$$\omega=g(z_1,z_2)\frac{dz_1}{(\partial f/\partial z_2)(z_1,z_2)}。$$

我们已经得到, n 个变量的次数 $\leqslant d$ 的多项式的数目为 $\binom{n+d}{d}$, 并且因此得到

$$\begin{aligned} g(S) &= h^0(S,\Omega^1) \\ &= \binom{d-1}{2}=\frac{(d-1)(d-2)}{2}。\end{aligned}$$

后面我们将看到怎样把这个公式推广到有一定奇异的曲线上。

$g=0,1$ 的情形

首先, 设 S 是亏格为 0 的任意紧致 Riemann 曲面。那么,

$$h^1(S,\mathscr{O})=h^0(S,\Omega^1)=0,$$

并且因此对伴随于任意点 $p\in S$ 的线丛 $L=[p]$, 从伴随于序列

$$0\to\mathscr{O}_S\to\mathscr{O}_S(L)\to L_p\to 0$$

的同调长序列, 我们得到, L 是在 p 处非零的整体截面, 即, 在 S 上存在一个非常数的亚纯函数 f, 它除 p 点外是全纯的, 且在 p 处只有一个简单极点。但是这样的函数假定 ∞ 值——从而每个 λ——正好出现一次, 并且因此给出一个同构 $f:S\to\mathbb{P}^1$。因此,

亏格为 0 的任意紧致 Riemann 曲面是 Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$。

接下来, 我们讨论亏格为 1 的曲线。关于这些曲线的所有知识直到下一节才用到; 现在, 我们开始证明: *亏格为 1 的任意紧致 Riemann 曲面 S 可以实现为 $\mathbb{P}^2$ 中的一条非奇异三次曲线。*

这个命题的证明是简单的: 我们知道, $\deg K_S = 0$, 并且因此由嵌入定理, 对任意 $p \in S$, 线丛 $L = [3p]$ 的完备线性系给出 S 作为 $\mathbb{P}^N$ 中三次曲线的一个嵌入, 其中 $N = h^0(S, \mathscr{O}(L)) - 1 \geqslant 2$。但是, $H^0(S, \mathscr{O}(L))$ 对应于 S 上的一个亚纯函数, 它在 $S - \{p\}$ 处全纯, 并且在 p 处的次数为 3; 因为任意这样的函数都唯一由其在 p 处的主部

$$\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \cdots$$

来确定, 并且不存在只有一个 p 处的单极点的亚纯函数——就象以前注记的那样, 这样的函数将给出 S 到 $\mathbb{P}^1$ 的 $1-1$ 对应——我们得到, $h^0(S, \mathscr{O}(L)) \leqslant 3$, 因此 $h^0(S, \mathscr{O}(L)) = 3$, 这就完成了证明。

但是, 在这种情况下, 需要明确地仔细检查这个过程。首先, 我们确立一个基本的一般结果:

引理(留数定理): *对紧致 Riemann 曲面 S 上除子为 $a_1 + \cdots + a_d$的亚纯 1 形式 φ, 有*

$$\sum_i \operatorname{Res}_{a_i}(\varphi) = 0。$$

证明: 设 $B_\varepsilon(a_i)$ 为 a_i 周围的一个 $\varepsilon-$圆盘, 由 Stokes 定理我们得到,

$$0 = -\int_{S - \cup_i B_\varepsilon(a_i)} d\varphi = \int_{\partial(\cup_i B_\varepsilon(a_i))} \varphi = \sum_i \operatorname{Res}_{a_i}(\varphi)。$$

证毕

把它应用到 $\varphi = df/f$ 再次证明了 S 上的亚纯函数 f 有同样多的零点和极点。

我们回到亏格为 1 的 Riemann 曲面 S。就象以前注意到的一样, 在 S 上没有非常数的亚纯函数, 使得它只在 p 处有一个单极点。另一方面, 由消没定理得到,

$$H^1(S, \mathscr{O}(p)) = 0,$$

并且因此恰当序列

$$0 \to \mathscr{O}(p) \to \mathscr{O}(2p) \to \mathbb{C}_p \to 0$$

表明, 的确存在一个 S 上的亚纯函数 F, 它在 p 处有一个双重极点, 且在其它处全纯。接下来,

$$h^0(S, \Omega^1) = g(S) = 1,$$

所以 S 有非零全纯 1 形式 ω; 因为 $\deg K_S = \deg(\omega) = 0$, 所以 ω 必然处处非零。考虑亚纯形式 $F \cdot \omega$; 它在 $S - \{p\}$ 上是全纯的, 并且由留数定理得到

$$\operatorname{Res}_p(F \cdot \omega) = 0。$$

因此, 如果 z 是 p 周围的任意局域坐标, 在乘以一个常数和加上一个常数后, 我们可以把 F 的级数展开写作

$$F(z) = \frac{1}{z^2} + [1]。$$

现在, 考虑 S 上的亚纯函数 dF/ω。因为 ω 处处非零, 所以 dF/ω 在 $S - \{p\}$ 上全纯, 并且在 p 处有三重极点; 对适当的常数 $\lambda, \lambda', \lambda''$, 设

$$F' = \lambda \frac{dF}{\omega} + \lambda' F + \lambda'',$$

在 p 附近我们可以写出

$$F'(z) = \frac{1}{z^3} + [1]。$$

因此, 伴随于线丛 $L = [3p]$ 的映射 $\iota_L : S \to \mathbb{P}^2$ 可定义为

$$q \mapsto [1, F(q), F'(q)]。$$

写出 p 周围的展开, 我们得到

$$F'(z)^2 = \frac{1}{z^6} + \frac{c}{z^2} + [-1]$$

和

$$f(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{c'}{z^3} + \frac{c''}{z^2} + [-1],$$

使得亚纯函数

$$F'(z)^2 + c'F'(z) - F(z)^3 + (c'' - c)F(z)$$

不在 p 处时是全纯的, 因此等于常数。在嵌入 ι_L 下 S 的像因此是多项式

$$y^2 + c'y = x^3 + ax + b$$

的轨迹, 其中 $x = Z_1/Z_0, y = Z_2/Z_0$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的欧氏坐标。在对坐标 y 进行线性变化后, 我们可以把这个形式多项式取作

$$(*) \qquad y^2 = x^3 + ax + b,$$

并且在最后对 x 的坐标进行线性变化, 并取多项式 $x^3 + ax + b$ 的其中两个根为 0 和 1 后, 我们得到: 对某些 $\lambda \in \mathbb{C}$, 亏格为 1 的任意曲线是三次多项式

$$y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - \lambda)$$

在 $\mathbb{P}^2$ 中的零点轨迹。

注意, 由上面可知, 亏格为 1 的 Riemann 曲面由上面多项式 $(*)$ 中的一个参数所确定; 因为 $\mathbb{C}$ 与任意秩为 2 的格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 的商是亏格为 1 的 *Riemann* 曲面, 并且因为除了一个

$\mathbb{C}$ 的同构外, 确定秩为 2 的格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 需要一个复参数, 所以我们可以预期, 亏格为 1 的所有曲线实际上可以作为 $\mathbb{C}/\Lambda$ 来实现。就象我们在下一节看到的一样, 实际情况正是如此。

最后, 我们注意到, $S = \mathbb{C}/\Lambda$ 上的亚纯函数与 $\mathbb{C}$ 上的整亚纯函数是一样的, 它对格子 Λ 是周期性的。

2. Abel 定理

Abel 定理——第一种描述

形式为

$$(*) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}$$

的不定积分在闭形式中容易解出; 更一般地, R 为有理函数的任意积分,

$$\int R(x, \sqrt{x^2+ax+b})dx$$

都有一个只包含初等函数的闭形式解。从早期的微积分运算就知道了这种类型积分的解。但是在很长时间里, 数学家都不能更多地解出积分

$$(**) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}},$$

或更一般地*Abel* 积分

$$\int R(x,y)dx,$$

其中 R 是有理函数, x 和 y 的关系为次数 > 2 的多项式方程 $f(x,y)=0$。

由于上节的亏格公式, 容易指出困难之所在: 第一个积分 $(*)$ 可以看作曲线 C 上亚纯形式 dx/y 的线积分

$$\int \frac{dx}{y},$$

其中曲线 C 由 $\mathbb{P}^2$ 中欧氏坐标 x, y 下的 $y^2 = x^2+ax+b$ 给出。现在, C 是二次曲线, 因此通过多项式映射同构于 $\mathbb{P}^1$; 如果 $t = t(x,y)$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的欧氏坐标, 那么, C 上的亚纯形式 dx/y 必然为 $\mathbb{P}^1$ 上的形式 $R(t)dt$。因此, 对 $(x_0,y_0),(x,y) \in C$, 得到

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \int_{t(x_0,y_0)}^{t(x,y)} R(t)dt,$$

并且后一个积分容易解出。还要注意, 因为 $\mathbb{P}^1$ 是单连通的且 dx/y 是闭的, 所以积分对路径选择的唯一依赖性就是 dx/y 的留数, 而它很容易计算。

另一方面, 积分 $(**)$ 是三次曲线 $C = (y^2 = x^3+ax^2+bx+c)$ 上形式 dx/y 的积分。现在, 如果 C 是光滑的, 那么, 由亏格公式其亏格为 1, 并且因此不能用单个亚纯函数来表

示; 因此不可能对 $(**)$ 给出象上面 $(*)$ 那样简单的表达式。还有, C 在拓扑上是个环面, 不是单连通的; 所以积分

$$\int_p^q \frac{dx}{y}$$

只在模掉 dx/y 的周期后才有明确的定义, 即, 它是闭环路 $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ 上 dx/y 的积分。更确切地说, 从前一节注意到, 形式 $\omega = dx/y$ 在 C 上处处全纯, 并且因此是 $H^0(C, \Omega^1)$ 的生成元。设 γ_1, γ_2 是 C 上生成 $H_1(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的闭环路, 并且用

$$a_1 = \int_{\gamma_1} \omega, \qquad a_2 = \int_{\gamma_2} \omega$$

来表示 ω 相应的周期。于是, C 上 ω 的一般周期的形式为 $n \cdot a_1 + m \cdot a_2$, $n, m \in \mathbb{Z}$。如果 a_1 和 a_2 在 $\mathbb{R}$ 上是线性不独立的, 那么, 对 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 我们可以写出

$$k_1 \int_{\gamma_1} \omega + k_2 \int_{\gamma_2} \omega = 0;$$

于是我们得到

$$k_1 \int_{\gamma_1} \bar{\omega} + k_2 \int_{\gamma_2} \bar{\omega} = 0,$$

并且因为 ω 和 $\bar{\omega}$ 生成 $H^{1,0}(C) \oplus H^{1,0}(C) = H^1_{\mathrm{DR}}(C)$, 所以它将意味着

$$k_1[\gamma_1] + k_2[\gamma_2] = 0 \in H_1(C, \mathbb{R}),$$

这是不可能的。因此, a_1 和 a_2 在 $\mathbb{R}$ 上是线性独立的, 并且因此 C 中 ω 的周期 $\Lambda = \{n \cdot a_1 + m \cdot a_2\}_{n,m \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ 形成 $\mathbb{C}$ 中的一个格子。相应地, 积分

$$\int_{p_0}^q \omega$$

的值——虽然不是明确定义的数——作为复环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的一个点有明确的定义。

朝着理解这种类型积分的第一个主要的步骤是 Abel 于1826年做出的。Abel 注意到, 虽然上面单个积分是在 C 上 $p = (x, y)$ 点的很难处理的函数, 但是更一般的*Abel* 求和

$$\sum \int_{p_0}^{p_i} \omega$$

的定性性质实际上服从简单的可表达的关系。Abel 证明的一个特殊情形如下: 对上述的 C 和 ω, 以及任意直线 $L \subset \mathbb{P}^2$, 设 $p_1(L), p_2(L)$ 和 $p_3(L)$ 表示 L 与 C 的三个交点(当然, 这些点的次序是不确定的)。设 $\psi(L)$ 表示 Abel 求和

$$\psi(L) = \sum_{i=1}^3 \int_{p_0}^{p_i} \omega;$$

象前面一样, $\psi(L)$ 模掉 ω 的周期 Λ 后有明确的定义。于是, 我们得到

Abel 定理(第一种描述):

$$\psi(L) = \text{常数}(\text{模 } \Lambda)\text{。}$$

证明: 证明的现代方案出奇地简单。我们把 ψ 看作从 $\mathbb{P}^2$ 中直线空间 $\mathbb{P}^{2*}$ 到复环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的一个映射

$$\psi : \mathbb{P}^{2*} \to \mathbb{C}/\Lambda;$$

显然, 它是全纯的。设 z 是 $\mathbb{C}/\Lambda$ 上的欧氏坐标, dz 是相应的整体 1 形式; 那么, 因为 $H^{1,0}(\mathbb{P}^2) = H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^1) = 0$, 所以

$$\psi^* dz \equiv 0,$$

并且因此得到 ψ 是常数。 证毕

用同样的方法, 我们来证明一个小的推广: 再次设 C 是亏格为 1 的曲线, $\omega \in H^0(C, \Omega^1)$ 是全纯微分, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是 ω 的周期格子。那么, 如果 $D = (g) = \sum p_i - \sum q_i$ 是 C 上亚纯函数 f 的除子, 那么我们得到

$$\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega \equiv 0(\text{模}\Lambda),$$

即, 存在从 q_i 到 p_i 的一个路径 α_i 的集合, 使得

$$\sum \int_{\alpha_i} \omega = 0\text{。}$$

证明: 对 $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$, 写出 $D_\lambda = (\lambda_0 f - \lambda_1) = \sum p_i(\lambda) - \sum q_i(\lambda)$; 设

$$\psi(\lambda) = \sum_i \int_{q_i(\lambda)}^{p_i(\lambda)} \omega(\text{模}\Lambda)\text{。}$$

于是, ψ 是全纯映射 $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}/\Lambda$; 用与前面同样的讨论, 我们得到,

$$\psi^* dz \in H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^1_{\mathbb{P}^1}) = 0$$

$\Rightarrow \psi$ 是常数, 并且因为当 $\lambda_0 \to 0$ 时, $\{p_i(\lambda)\} \to \{q_i(\lambda)\}$, 所以我们得到 $\psi \equiv 0(\text{模}\Lambda)$。证毕

从有关互反公式的一些初步知识, 我们可以给出任意亏格的 Riemann 曲面的这个 Abel 定理描述的逆定理。它与 Riemann–Roch 公式一起得到了研究代数曲线的基本工具。

现在, 设 S 是亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面, 并且设 $\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$ 是 S 中形成 $H_1(X, \mathbb{Z})$ 的基的 1 闭链。我们可以把 $\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$ 取为典范基, 即, 使得 δ_i 与 δ_{i+g} 只正向相交一次, 而与其它 δ_j 不相交。在这样的典范基下, 闭链 $\delta_1, \cdots, \delta_g$ 称为A-闭链, $\delta_{g+1}, \cdots, \delta_{2g}$ 称为B-闭链。

现在, 设 $\omega_1, \cdots, \omega_g \in H^0(S, \Omega^1)$ 是 S 上全纯 1 形式空间。S 的周期矩阵是 $g \times 2g$ 矩阵

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{pmatrix}\text{。}$$

周期矩阵的(转置)列矢量 $\Pi_i = (\int_{\delta_i} \omega_i, \cdots, \int_{\delta_i} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ 称为周期; 我们首先验证它们在 $\mathbb{R}$ 上是线性独立的: 如果我们有 $\sum k_i \Pi_i = 0,\ k_i \in \mathbb{R}$, 那么,

$$\begin{aligned} &\sum k_i \int_{\delta_i} \omega_j = 0 \quad 对所有 j \\ \Rightarrow\ &\sum k_i \int_{\delta_i} \bar{\omega}_j = 0 \quad 对所有 j \\ \Rightarrow\ &\sum k_i [\delta_i] = 0 \in H_1(S, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

这是因为 $\{\omega_j, \bar{\omega}_j\}$ 张开了 $H^1_{\mathrm{DR}}(S)$; 这是不可能的, 因为 $\{\delta_i\}$ 是 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 的基。

于是, $2g$ 个周期 $\Pi_i \in \mathbb{C}^g$ 在 $\mathbb{C}^g$ 中生成了一个格子

$$\Lambda = \{m_1 \Pi_1 + \cdots + m_{2g} \Delta_{2g}, m_i \in \mathbb{Z}\};$$

我们把 S 的 *Jacobi* 簇 $\mathscr{J}(S)$ 定义为复环面 $\mathbb{C}^g/\Lambda$。 Jacobi 簇是 Abel 积分的自然区间: 虽然单全纯微分 ω 的积分 $\int_p^q \omega$ 只定义在模 ω 的 $2g$ 周期上(它与 $\mathbb{C}$ 中一样稠密), 但是, 作为 $\mathbb{C}^g$ 中模离散格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ 的矢量,

$$\left(\int_p^q \omega_1, \cdots, \int_p^q \omega_g \right)$$

有明确的定义。因此, 选定一个基点 $p_0 \in S$, 我们有一个自然映射

$$\mu : S \to \mathscr{J}(S),$$

它由

$$\mu(p) = \left(\int_{p_0}^p \omega_1, \cdots, \int_{p_0}^p \omega_g \right) \in \mathscr{J}(S)$$

给出。更一般地, 如果 $\mathrm{Div}^0(S)$ 表示 S 上次数为 0 的除子群, 那么, 我们把 $\mu : \mathrm{Div}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$ 定义为

$$\mu\left(\sum p_\lambda - \sum q_\lambda\right) = \left(\sum \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_\lambda, \cdots \sum \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_g \right)。$$

为了研究这个映射, 我们需要知道 ω_i 的周期之中的一些关系。它们表示在互反定律中, 现在我们来推导它们。

第一互反定律和推论

首先, 我们可以假定, Riemann 曲面 S 上的所有闭链 δ_i 由公共点 $s_0 \in S$ 所产生。于是, δ_i 的补集是 S 上的单连通区域 Δ; 边缘 $\partial\Delta$ 包含每个 δ_i 两次, 而且是反向的, 见图2。我们要做的是, 把亏格为 g 的曲面的熟悉的拓扑表示变成有 $4g$ 个边的多边形, 其中的边成对相等。

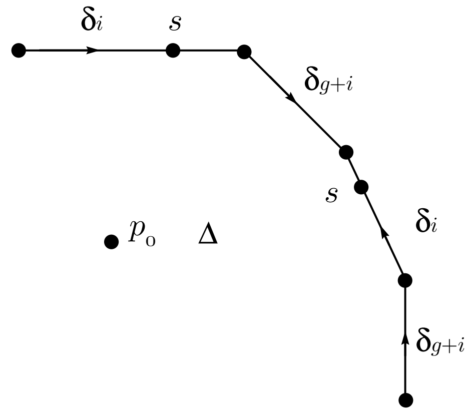


Figure 2

现在, 设 ω 是 S 上全纯微分, η 是亚纯形式, 它的唯一的奇异性是点 $s_\lambda \in S$ 处的单极点。假定 η 在路径 δ_i 上没有极点, 设 Π^i 和 N^i 分别表示 ω 和 η 沿着路径 δ_i 的周期。因为区域 Δ_i 是单连通的且 ω 是全纯的, 那么我们设

$$\pi(s) = \int_{s_0}^{s} \omega$$

来得到 $\bar{\Delta}$ 中的全纯函数 π, 并且 $\omega = d\pi$。(见图3。) 注意, 对 S 上等价的且在 $\partial\Delta$ 上的任意一对点 $p \in \delta_i, p' \in \delta_i^{-1}$, 得到

$$\begin{aligned} \pi(p') - \pi(p) &= \int_{p}^{p'} \omega \\ &= \int_{p}^{\delta_i(1)} \omega + \int_{\delta_{g+i}} \omega + \int_{\delta_i(1)}^{p'} \omega \\ &= \int_{\delta_{g+i}} \omega \\ &= \Pi^{g+i}, \end{aligned}$$

并且对 S 上等价的 $p \in \delta_{g+i}, p' \in \delta_{g+i}^{-1}$, 有

$$\pi(p') - \pi(p) = -\Pi^i。$$

考虑 $\bar{\Delta}$ 中的亚纯 1 形式 $\pi \cdot \eta$。由留数定理, 因为 η 有唯一的一阶极点, 所以

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \pi \cdot \eta &= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{\lambda} \mathrm{Res}_{s_\lambda}(\pi \cdot \eta) \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{\lambda} \mathrm{Res}_{s_\lambda}(\eta) \cdot \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega。 \end{aligned}$$

另一方面, 通过考虑对应于 δ_i 和 δ_i^{-1} 的 $\partial\Delta$ 的配对边合起来的贡献, 我们可以明确计算出 $\partial\Delta$ 周围 $\pi \cdot \eta$ 的积分: 因为对 S 上等价的点 $p \in \delta_i$ 和 $p' \in \delta_i^{-1}$, $\Pi(p') - \Pi(p)$ 的差是一个常

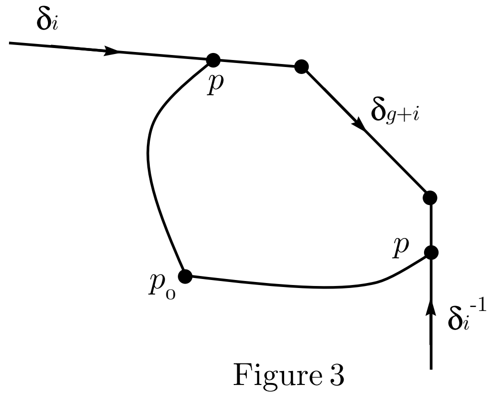


Figure 3

数 Π^{g+i}, 所以我们得到,

$$\int_{\delta_i+\delta_i^{-1}} \pi \cdot \eta = -\Pi^{g+i} \cdot \int_{\delta_i} \eta = -\pi^{g+i} \cdot N^i。$$

类似地,

$$\int_{\delta_{g+i}+\delta_{g+i}^{-1}} \pi \cdot \eta = \Pi^i \cdot N^{g+i}。$$

比较 $\int_{\partial\Delta} \pi \cdot \eta$ 的这两个表达式我们得到

互反定律 I:

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi^i N^{g+i} - \Pi^{g+i} N^i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{\lambda} \mathrm{Res}_{s_\lambda}(\eta) \cdot \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega,$$

其中, 右边的积分取在 Δ 的内部。

这在经典上被称为*第一和第三类微分的互反定律*。用经典的术语来说, Riemann 曲面 S 的*第一类微分*是全纯 1 形式; *第二类微分*是没有留数的亚纯 1 形式, *第三类微分*是只有单极点的亚纯形式。显然, 一个微分是第一类的, 当且仅当它既是第二类的又是第三类的; 不久我们将看到, 任意亚纯 1 形式是第二和第三类微分的和。后面我们将证明第一和第二类微分的互反定律。

在我们可以使用互反定律之前, 我们需要证明一个类似的结果, 它使得我们可以把 $H^0(S, \Omega^1)$ 的基归一化。设 ω, ω' 是 S 上的两个全纯 1 形式, Π^i 和 Π'^i 分别是它们在 δ_i 周围的周期。设 Δ 和 π 如上, 并且考虑形式 $\pi \cdot \bar{\omega}'$ 的 $\partial\Delta$ 周围的积分。外微分为 $d(\pi \cdot \bar{\omega}') = d\pi \wedge \bar{\omega}' = \omega \wedge \bar{\omega}'$, 并且因此由 Stokes 定律

$$\int_{\partial\Delta} \pi \cdot \bar{\omega}' = \int \omega \wedge \bar{\omega}',$$

以及就象互反定律证明中一样计算线积分的值, 我们得到,

$$\int_S \omega \wedge \bar{\omega}' = \sum (\Pi^i \cdot \overline{\Pi'^{i+g}} - \Pi^{i+g} \overline{\Pi'^i})。$$

特别是, 如果我们取 $\omega' = \omega$, 那么, 因为 $\omega \wedge \bar{\omega}$ 是正定的, 所以我们得到, 对 $\omega \not\equiv 0$,

$$(**) \qquad 0 < \sqrt{-1}\int_S \omega \wedge \bar{\omega} = \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{g}(\Pi^i\overline{\Pi^{g+i}} - \Pi^{g+i}\overline{\Pi^i})。$$

由此得到, A-周期都等于零的任意全纯 1 形式 ω 必然恒等于零, 即, 周期矩阵 Ω 的第一个 $g \times g$ 子式是非奇异的。一旦我们知道了它, 我们可以把 $H^0(S, \Omega^1)$ 的基 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 取作

$$\int_{\delta_i} \omega_j = \delta_{ij} \qquad 对 1 \leqslant i, j \leqslant g,$$

即, 使得周期矩阵的形式为

$$(I_g, Z)。$$

这样的 $H^0(S, \Omega^1)$ 的基称为*归一化的*。

我们现在回到互反定律并且推导一些结果。首先, 考虑 $\eta = \omega'$ 是全纯 1 形式的情况; 把 ω' 的周期写作 Π'^i。因为 ω' 没有留数, 所以从公式得到

$$\sum_{i=1}^{g}(\Pi^i\Pi'^{g+i} - \Pi^{g+i}\Pi'^i) = 0。$$

这是周期中的*第一 Riemann 双线性关系*。特别是, 如果 $\omega = \omega_i, \omega' = \omega_j$ 是归一化基的元素, 那么表达式右边除了两项外都等于零, 并且我们得到

$$\int_{\delta_{g+i}} \omega_j - \int_{\delta_{g+j}} \omega_i = 0,$$

即, 上述周期矩阵的右边的方块 Z 是对称的。注意, 因为由

$$(\omega_i, \omega_j) = \sqrt{-1}\int_S \omega_i \wedge \bar{\omega}_j = \sqrt{-1}\overline{\int_{\delta_{g+i}} \omega_j} - \sqrt{-1}\int_{\delta_{g+j}} \omega_i = 2 \cdot \mathrm{Im}\int_{\delta_{g+i}} \omega_j$$

给出的 $H^0(S, \Omega^1)$ 上的二次形式是正定的, 所以 Z 的虚部 $\mathrm{Im}(Z)$ 是正定的; 这是*第二 Riemann 双线性关系*。总之, 这两个 Riemann 双线性关系意味着, 对 $H^0(S, \Omega^1)$ 的归一基, S 的周期矩阵的形式为

$$\Omega = (I, Z) \qquad 其中, Z = {}^tZ, \quad \mathrm{Im}Z > 0。$$

Abel 定理——第二种描述

象以前一样, 设 S 是亏格为 g 的 Riemann 曲面, $D = \sum(p_\lambda - q_\lambda)$ 是 S 上次数为 0 的除子, 并且考虑 Abel 求和

$$\mu(D) = \left(\sum\int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_1, \cdots, \sum\int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_g\right) \in \mathscr{J}(S)。$$

在 $g=1$ 的情况下, Abel 定理告诉我们, 如果 D 是 S 上亚纯函数 f 的除子 (f), 那么, $\mu(D)=0$。不难把这个陈述推广到亏格为 g 的情形: 如果 $D=(f)$, 那么从 $\mathbb{P}^1$ 到 $\mathscr{J}(S)$ 的映射

$$\psi:[\lambda_0,\lambda_1]\to\mu((\lambda_0 f-\lambda_1))$$

是全纯的, 并且, 由于复环面 $\mathscr{J}(S)$ 上的全纯 1 形式 dz_i 在每个点张开余切空间, 所以

$$\begin{aligned}\psi^*(dz_i)\equiv 0 \quad&\Rightarrow\quad \psi\text{是常数}\\ &\Rightarrow\quad \mu(D)=\psi(0)=\psi(\infty)=0\text{。}\end{aligned}$$

反过来, 我们现在将证明, 如果 $D=\sum(p_\lambda-q_\lambda)$ 是 S 上次数为 0 的任意除子且 $\mu(D)=0$, 那么, D 是亚纯函数的除子。

这个问题首先看起来很难, 但是如果我们把它从关于亚纯函数存在性的问题变换成关于一定的亚纯形式存在性的问题, 将变得直截了当了。注意, 如果 f 是亚纯函数, 满足 $(f)=\sum(p_\lambda-q_\lambda)$, 那么, 微分

$$\eta=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log f=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{df}{f}$$

是亚纯形式, 其极除子为

$$(\eta)_\infty=-\left(\sum_\lambda(p_\lambda+q_\lambda)\right) \tag{1}$$

$$\operatorname{Res}_{p_\lambda}(\eta)=\frac{a_\lambda}{2\pi\sqrt{-1}},\quad \operatorname{Res}_{q_\lambda}(\eta)=\frac{b_\lambda}{2\pi\sqrt{-1}}, \tag{2}$$

其中, 对不同的 p_λ 和 q_λ, 我们现在写出

$$D=\sum a_i p_i+\sum b_i q_i;$$

并且还有, 对 $S-\{p_i,q_i\}$ 上的任意闭环路 γ, 有

$$\int_\gamma \eta\in\mathbb{Z}\text{。}$$

反过来, 如果 η 是任意亚纯形式, 并满足这三个性质, 我们可以设

$$f(p)=e^{2\pi i\int_{p_0}^{p}\eta}$$

来得到满足 $(f)=D$ 的明确定义的亚纯函数 f。因此, 为了证明 Abel 定理的逆定理, 我们必须证明, 对 $\mu(D)=0$ 的 $D=\sum(p_\lambda-q-\lambda)$, 存在一个第三类微分 η, 它在 $S-\{p_\lambda,q_\lambda\}$ 上全纯, 在 p_λ 处留数为 a_λ, 在 q_λ 处留数为 b_λ, 并且有所有的整数周期。首先, 我们要验证, 我们至少可以找到满足奇异性的亚纯微分:

引理: *给定 S 上一个有限点集 $\{p_\lambda\}$ 和满足 $\sum a_\lambda=0$ 的复数 a_λ, 存在 S 上的一个第三类微分, 它在 $S-\{p_\lambda\}$ 上全纯, 并且在 p_λ 处有留数 a_λ。*

证明: 考虑 S 上的恰当层序列

$$0 \to \Omega^1 \to \Omega^1(\sum p_\lambda) \xrightarrow{\text{Res}} \oplus \mathbb{C}_{p_\lambda} \to 0。$$

由 Kodaira–Serre 对偶, 得到

$$H^1(S, \Omega^1) \cong H^0(S, \mathscr{O}) \cong \mathbb{C},$$

使得在 $\oplus \mathbb{C}_{p_\lambda}$ 中 $H^0(S, \Omega^1([\sum p_\lambda]))$ 的像的余维数至多为 1。但是我们已经知道, S 上任意亚纯 1 形式的留数和等于零; 因此, $H^0(S, \Omega^1([\sum p_\lambda]))$ 的像被包含在超平面 $(\sum a_\lambda = 0) \subset \oplus \mathbb{C}_{p_\lambda}$ 中, 从而等于这个超平面。 证毕

现在, 象第227页那样选择表示 $H_1(S, \mathbb{Z})$ 的典范基的闭链 $\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$, 使得点 p_λ, q_λ 都不处在每个路径 δ_i 上, 并且设 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 是 $H^0(S, \Omega^1)$ 关于 $\{\delta_1, \cdots, \delta_{2g}\}$ 的归一基。由引理, 存在一个第三类微分, 其留数在 p_λ 处为 $a_\lambda/(2\pi\sqrt{-1})$, 在 q_λ 处为 $b_\lambda/(2\pi\sqrt{-1})$; 任意两个这样的形式差一个 S 上的全纯形式, 并且因此存在一个唯一这样的形式 η, 使得 A-周期为

$$N^i = \int_{\delta_i} \eta = 0 \qquad i = 1, \cdots, g。$$

现在, 问题是改变 η, 使得它的所有 B-周期是整数; 显然, 在不影响 η 的奇异性和它的 A-周期的整数性下, 我们只通过附加上形式 ω_i 的整数线性组合来进行。为了弄清楚是不是可以, 我们通过互反定律得到 η 的 B-周期: 因为对 $i = 1, \cdots, g$, 有 $N^i = 0$, 所以, 对每个 i, 和从 q_λ 到 p_λ 的某些选择的路径 a_λ, 我们得到

$$\begin{aligned} N^{g+i} &= \sum_\lambda a_\lambda \int_{p_0}^{p_\lambda} \omega_i + \sum_\lambda b_\lambda \int_{p_0}^{q_\lambda} \omega_i \\ &= \sum_\lambda \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_i。\end{aligned}$$

现在, 我们在本质上已经做完了。由假设,

$$\mu(D) = \left(\sum_\lambda \int_{\alpha_\lambda} \omega_1, \cdots, \sum_\lambda \int_{\alpha_\lambda} \omega_g \right) \in \Lambda,$$

即, 存在一个闭链

$$\gamma \sim \sum_{k=1}^{2g} m_k \cdot \delta_k, \quad m_k \in \mathbb{Z},$$

使得对每个 i, 有

$$\sum_\lambda \int_{\alpha_\lambda} \omega_i = \int_\gamma \omega_i,$$

并且因此

$$N^{g+i} = \int_\gamma \omega_i \quad 对所有 i。$$

设

$$\eta' = \eta - \sum_{k=1}^{g} m_{g+k}\omega_k。$$

于是, 由 Riemann 的第一双线性关系, η' 的周期 N'^i 由下式给出:

$$\begin{aligned}
N'^i &= -m_{g+i}, \quad i = 1, \cdots, g, \\
N'^{g+i} &= N^{g+i} - \sum_{k=1}^{g} m_{g+k} \int_{\delta_{g+i}} \omega_k \\
&= \sum_{k=1}^{2g} m_k \int_{\delta_k} \omega_i - \sum_{k=1}^{g} m_{g+k} \int_{\delta_{g+i}} \omega_k \\
&= m_i + \sum_{k=i}^{g} m_{g+k} \left(\int_{\delta_{g+k}} \omega_i - \int_{\delta_{g+i}} \omega_k \right) \\
&= m_i。
\end{aligned}$$

因此, η' 有所有的整数周期, 并且对 $f(p) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\int_{p_0}^{p}\eta')$, 有 $D = (f)$。总之, 我们已经证明了

Abel 定理(第二种描述): 给定 $D = \sum(p_\lambda - q_\lambda) \in \mathrm{Div}(S)$ 和 S 上全纯 1 形式空间的一组基 $\omega_1, \cdots, \omega_g$, 那么, 对某些 S 上的亚纯函数 f, $D = (f)$ 当且仅当

$$\varphi(D) = \left(\sum_\lambda \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_1, \cdots, \sum_\lambda \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_g \right) \equiv 0(\Lambda)。$$

用形象的语言来说: 回想 $\mathrm{Pic}^0(S)$ 是 S 上次数为 0 的除子群模线性等价, 映射

$$\mu : \mathrm{Div}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$$

把

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Div}^0(S) & \xrightarrow{\mu} & \mathscr{J}(S) \\
\nwarrow & & \nearrow \tilde{\mu} \\
& \mathrm{Pic}^0(S) &
\end{array}$$

进行分解, 得到了一个单射 $\tilde{\mu} : \mathrm{Pic}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$。

Jacobi 反演

上面 Abel 定理的第二种描述提出了我们的下一个问题: 由 Abel 求和给出的映射 $\mu : \mathrm{Div}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$ 是不是满射; 或者换句话说, 诱导映射 $\tilde{\mu} : \mathrm{Pic}^0(S) \to \mathscr{J}(S)$ 是不是同构? Jacobi 反演定理断言, 这个问题的答案是肯定的, 并且它实际上告诉我们, 通过维数计算就得到我们提到的结果。

定理(Jacobi 反演): 给定亏格为 g 的曲线 S, $p_0 \in S$ 并且 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 是 $H^0(S, \Omega^1)$ 的基, 那么, 对任意 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$, 我们可以找到 g 个点 $p_1, \cdots, p_g \in S$, 使得

$$(*) \qquad \mu\left(\sum_i (p_i - p_0)\right) = \lambda,$$

即, 对任意矢量 $\lambda \in \mathbb{C}^g$, 我们可以找到 $p_1, \cdots, p_g$ 和从 p_0 到 p_i 的路径 α_i, 使得对所有的 j, 有

$$\sum_i \int_{\alpha_i} \omega_j = \lambda_j。$$

还有, 对一般的 $\lambda \in \mathbb{C}^g$, 除子 $\sum p_i$ 是唯一的。

证明: 现在, 我们只证明结果; 在本章第七节, 在引入 Riemann theta 函数后, 我们将看到怎样直接解方程 $(*)$。

首先, 设 $S^{(d)}$ 表示 S 上次数为 d 的有效除子集合, 即 S 上点 $\{p_1, \cdots, p_d\}$ 的无序 d元组的集合, 这些点可以相同。 $S^{(d)}$ 是 S 的 d重乘积 $S^d = S \times S \times \cdots \times S$ 与被 d 个元素上的对称群 $\sum_d$ 作用 d 次后的它本身这二者的商; 同样, 它从 S^d 继承了拓扑空间的结构。实际上, 投影映射 $\pi : S^d \to S^{(d)}$ 把复流形结构赋予了 $S^{(d)}$: 对一个点 $D = \sum p_i \in S^{(d)}$, 设 z_i 是 S 中 p_i 的邻域 U_i 中的局域坐标, 其中, 对 $p_i \neq p_j$ 我们取 $U_i \cap U_j = \emptyset$, 对 $p_i = p_j$, 在 $U_i = U_j$ 中取 $z_i = z_j$。于是, 如果我们设 $\sigma_1, \cdots, \sigma_d$ 表示初等对称函数, 那么, 由代数基本定理, 映射

$$\sum q_i \mapsto (\sigma_1\{z_i(q_i)\}, \cdots, \sigma_d\{z_i(q_i)\})$$

给出 $\pi(U_1 \times \cdots \times U_d) \subset S^{(d)}$ 上的一个坐标卡。注意, 在分支轨迹以外, 映射 π 是一个覆盖映射, 并且我们可以在 $S^{(d)}$ 上取坐标为 $(z_1(p_1), \cdots, z_d(p_d))$。在另一端, 在点 $d \cdot p$ 周围, 局域坐标为

$$(z_1 + \cdots + z_d, \cdots, z_1 \cdots z_d)。$$

紧致复流形 $S^{(d)}$ 称为 S 的d 次对称积。(验证一下, $\mathbb{P}^{1(d)} = \mathbb{P}^d$。) 固定一个基点 $p_0 \in S$, 有一个包含映射

$$\iota : S^{(d)} \to \operatorname{Div}^0(S),$$

它由

$$\sum p_\lambda \mapsto \sum (p_\lambda - p_0)$$

给出, 并且相应地有全纯映射

$$\begin{aligned} \mu^{(d)} : S^{(d)} \quad &\to \quad \mathscr{J}(S) \\ : \sum p_\lambda \quad &\mapsto \quad \left(\sum_\lambda \int_{p_0}^{p_\lambda} \omega_1, \cdots, \sum_\lambda \int_{p_0}^{p_\lambda} \omega_g\right)。\end{aligned}$$

在这种情形下, Jacobi 反演定理断言, 对亏格为 g 的 S, 映射 $\mu^{(d)}$ 是满射, 并且一般是一一对应的。

现在, 设 $D=\sum p_i$ 是所有 p_i 都不同的 $S^{(g)}$ 的点, z_i 是 p_i 为中心的 S 上的局域坐标, $(z_1,\cdots,z_g)$ 是 D 附近 $S^{(g)}$ 上的相应坐标。对 D 附近的 $D'=\sum z_i$, 通过运算得到,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_i}(\mu^{(g)}(D')) &= \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\int_{p_0}^{z_i}\omega_j\right)\\ &= \omega_j/dz_i,\end{aligned}$$

其中, 我们把 ω/dz 写作 $h(z)$, 使得 $\omega=h(z)dz$。因此, 映射 $\mu^{(d)}$ 在 D 附近的 Jacobi 矩阵为

$$\mathscr{J}(\mu^{(d)})=\begin{pmatrix}\omega_1/dz_1 & \cdots & \omega_1/dz_g\\ \vdots & & \vdots\\ \omega_g/dz_1 & \cdots & \omega_g/dz_g\end{pmatrix}。$$

(这是一个基本结果。) 我们注意到, 局域坐标 z_i 的变化等于第 i 列乘上一个非零因子, 但是这不影响 $\mathscr{J}(\mu^{(d)})$ 的秩。

我们可以选择 p_1, 使得 $\omega(p_1)\neq 0$, 并且因此从 $\omega_2,\cdots,\omega_g$ 中减去一个 ω_1 的倍数, 这样, 我们可以重新安排, 使得 $\omega_2(p_1)=\cdots=\omega_g(p_1)=0$。接着, 我们可以选择 p_2, 使得 $\omega_2(p_2)\neq 0$, 并且象前面一样重新安排使得 $\omega_3(p_2)=\cdots=\omega_g(p_2)=0$。这样继续下去, D 处的 Jacobi 矩阵就变成三角矩阵了, 其对角线以下都是零, 对角线以上都不是零, 并且因此在 D 处有的最大秩。

因此, 映射 $\mu^{(g)}$ 不是处处奇异的, 并且由于这个结果, Jacobi 反演定理得到: 如果 $|\mathscr{J}(f)|\neq 0$, 那么, 紧致连通的同维数复流形之间的任意全纯映射 $f:M\to N$ 是满射。从真映射定理立即得到: $f(M)\subset N$ 是一个解析子簇, 并且包含一个开集, 因此 $f(M)=N$。对更基本的讨论, 设 ψ_N 是 N 上的体积形式。因为 f 是保持定向的且 $|\mathscr{J}(f)|\neq 0$, 所以,

$$\int_M f^*\psi_N>0。$$

另一方面, 对任意 $q\in N$, 我们得到

$$H^{2n}(N-\{q\},\mathbb{R})=0,$$

因此, 对某些 $\varphi\in A^{2n-1}(N-\{q\})$, 在 $N-\{q\}$ 中有

$$\psi_N=d\varphi。$$

因此, 如果 $q\notin f(M)$, 那么,

$$\int_M f^*\psi_N=\int_{\partial M}df^*\varphi=0,$$

产生矛盾。

剩下要证明的唯一的问题是, $\mu^{(g)}$ 一般是一对一的。但它很明显: 由 Abel 定理, 任意点 $\lambda\in\mathscr{J}(S)$ 上 $\mu^{(g)}$ 的纤维由线性等价于任意除子 $D\in{\mu^{(g)}}^{-1}(\lambda)$ 的有效除子集合 $|D|$ 组

成, 这是一个射影空间。另一方面, 由维数分析, $\mu^{(g)}$ 的一般纤维是 0 维的; 所以 $\mu^{(g)}$ 的纤维是一个点。(映射 $\mu^{(g)}$ 是双有理映射的一个例子; 我们将在第四章详细讨论它。) 证毕

注意, 作为 Jacobi 反演定理的一个推论, 我们得到, *亏格为 g 的 Riemann 曲面上, 次数 $\geqslant g$ 的每个除子线性等价于一个有效除子。*

特别考虑亏格为 1 的 Riemann 曲面的情形。那么, $\mathscr{J}(S)=\mathbb{C}/\Lambda$, 并且映射 $\mu^{(1)}$ 直接由

$$\mu : p \mapsto \int_{p_0}^{p} \omega$$

给出, 其中, ω 是 $H^0(S,\Omega^1)$ 的生成元。由 Abel 定理, 只有当在 S 上存在一个亚纯函数 f 且 $(f)=(p-p_0)-(p'-p_0)=p-p'$ 时, 有 $\mu(p)=\mu(p')$; 因为我们已经知道, 在 S 上不存在只有一个单极点的亚纯函数, 所以映射 $\mu^{(1)}$ 是单射。由 Jacobi 反演定理, 映射也是满射, 并且因此我们得到同构

$$\mu : S \to \mathscr{J}(S),$$

即, *对某些格子 $\Lambda\subset\mathbb{C}$, 每个亏格为 1 的 Riemann 曲面的形式为 $\mathbb{C}/\Lambda$。*

因此我们得到了基本的结果: $\mathbb{P}^2$ 中非奇异的三次曲线与复平面中适当格子 Λ 的紧致 Riemann 曲面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 是一样的。因此, 每个这样的曲线 C 有一个群结构; 我们将主要讨论它。

首先, 回想一下, 在前节的结尾, 我们在亏格为 1 的 Riemann 曲面 C 上构造了亚纯函数 F 和 F', 在基点 $p_0\in C$ 处, 它们分别有二重和三重极点, 在其它处是全纯的。我们选择 F 和 F' 适当在 p_0 周围的局域坐标 z 下,

$$F(w)=\frac{1}{w^2}+[1]$$

和

$$F'(w)=\frac{1}{w^3}+[1],$$

并且,

$$dF=F'\cdot\omega,$$

其中, ω 是 C 上非零的整体全纯 1 形式。现在, 我们可以把 C 表示为复环面 $\mathbb{C}/\Lambda$; 设 z 是 C 上的欧氏坐标, 满足 $\omega=dz$。那么, 函数 F 是 *Weierstrass* $\mathscr{P}$ 函数; 它的微商 $(\partial/\partial z)\mathscr{P}=-2F'$ 表示为 $\mathscr{P}'$。注意, 在 p_0 周围 $\mathscr{P}$ 的 Laurent 级数不包含奇次项, 这是因为如果那样, $\mathscr{P}(z)-\mathscr{P}(-z)$ 将是 C 上非常数的全纯函数。因此得到,

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(z) &= \frac{1}{z^2}+az^2+bz^4+[6],\\
\mathscr{P}'(z) &= -\frac{2}{z^3}+2az+4bz^3+[5],\\
\mathscr{P}(z)^3 &= \frac{1}{z^6}+\frac{3a}{z^2}+3b+[2],\\
\mathscr{P}'(z)^2 &= \frac{4}{z^6}-\frac{8a}{z^2}-16b+[1],
\end{aligned}$$

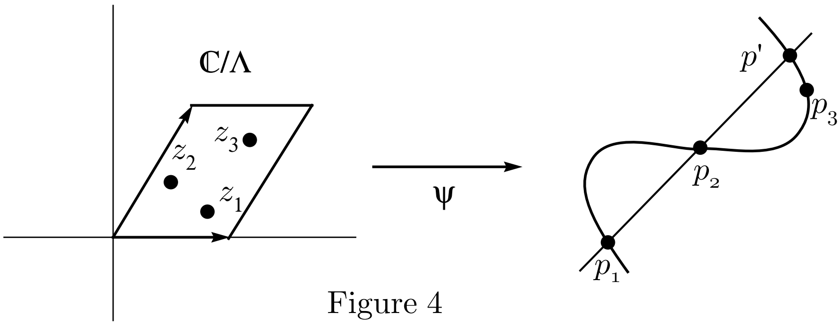


Figure 4

由此我们可以推导出, $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}'$ 满足下列关系:

$$\mathscr{P}'^2 = 4 \cdot \mathscr{P}^3 - 20a \cdot \mathscr{P} - 28b;$$

为了方便, 把 $20a$ 写作 g_2, 把 $28b$ 写作 g_3。

现在, 由

$$z \mapsto [1, \mathscr{P}(z), \mathscr{P}'(z)]$$

给出的全纯映射

$$\psi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^2$$

把 $\mathbb{C}/\Lambda$ 嵌入为多项式 $f(x, y) = y^2 - 4x^3 + g_2 \cdot x + g_3$ 的轨迹。$C = \mathbb{C}/\Lambda$ 上的微分 $\omega = dz$ 是 Poincaré 留数

$$\omega = R\left(\frac{dx \wedge dy}{f(x, y)}\right) = \frac{dx}{\partial f/\partial y} = \frac{dx}{y},$$

并且 ψ 的逆是 Abel 积分

$$\psi^{-1}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dx}{y} \quad \text{模周期},$$

其中, 在此情形下我们取 $p_0 = \psi(0) = [0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$。如果 $p_1, p_2, p_3 \in C$ 且 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}/\Lambda$ 中的相应点, 那么, Abel 定理等于说

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0(\lambda) \Leftrightarrow (3p_0 - p_1 - p_2 - p_3) \sim 0,$$

即, 在 C 上存在一个亚纯函数, 它在 p_0 点有一个三重极点, 而 p_1, p_2, p_3 是三个零点。为此, 设 $A(x, y) = ax + by + c$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中连接 p_1, p_2 的直线 L 的方程, 并且用 p' 表示 L 与 C 的第三个交点(图4)。那么, 因为无穷远处的直线与 C 相交于除子 $3p_0$, 所以 $A(\mathscr{P}(z), \mathscr{P}'(z))$ 是 $C = \mathbb{C}/\Lambda$ 上的亚纯函数, 其除子为 $p_1 + p_2 + p' - 3p_0$。因此, $p' \sim p_3$, 并且 $p' = p_3$。总之:

$$(*) \qquad z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0(\Lambda) \Leftrightarrow p_1, p_2, p_3 \text{共线}。$$

设 $p_i = [1, \mathscr{P}(z_i), \mathscr{P}'(z_i)]$, 我们可以把 $(*)$ 重新写作下列形式:

$$(**) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \mathscr{P}(z_1) & \mathscr{P}'(z_1) \\ 1 & \mathscr{P}(z_2) & \mathscr{P}'(z_2) \\ 1 & \mathscr{P}(z_3) & \mathscr{P}'(z_3) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0(\Lambda)。$$

这个美妙的关系可以最终用几种等价的方法来解释。一个就是著名的椭圆函数的加法定理, 它把 $\mathscr{P}(-z_1-z_2)=\mathscr{P}(z_1+z_2)$ 和 $\mathscr{P}'(-z_1-z_2)=-\mathscr{P}'(z_1+z_2)$ 用 $\mathscr{P}(z_1), \mathscr{P}(z_2), \mathscr{P}'(z_1)$ 和 $\mathscr{P}'(z_2)$ 的有理函数的方式表示出来。另外, 通过用 $(**)$ 指定的直线来构造, 我们可以在几何上给出三次曲线 C 的群结构。在任何情况下, 由 Abel 定理得到的椭圆积分的反演和平面中三次曲线的相应理论在代数几何这个课题中都占据特殊的和谐而深奥的位置。

3. 曲线的线性系

互反定律 II

设 S 是亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面, ω 是 S 上整体全纯 1 形式, η 是第二类微分, 即, 没有留数的整体亚纯 1 形式。就象在第一互反定律中一样, 我们想把 ω 和 η 的周期联系到 η 的奇异性上。因为这些奇异性不能被内在定义的留数所描述, 所以我们在 η 的每个奇异点 p 周围选择一个局域坐标 z, 并且写作

$$\begin{aligned}\eta(z) &= (a_{-n}^p z^{-n}+\cdots+a_0^p+a_1^p z+\cdots)dz,\\ \omega(z) &= (b_0^p+b_1^p z+\cdots)dz。\end{aligned}$$

注意, 就象前面定义的一样, $a_{-1}^p=\mathrm{Res}_p(\eta)=0$ 且 $b_0^p(p)=(\omega/dz)(p)$。

现在, 设 $\delta_1,\cdots,\delta_{2g}$ 是 S 上表示 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 的典范基的闭链, 除了在公共基点 $s_0\in S$ 外不相交, 并且不包含 η 的任意奇异点; 设 Π^i 和 N^i 表示沿着 δ_i 的 ω 和 η 的周期。象前面一样, $\Delta=S-\cup\delta_i$ 是单连通的, 并且, 为了得到 Δ 上满足 $d\pi=\omega$ 的全纯函数 π, 我们可以设

$$\pi(s)=\int_{s_0}^{s}\omega。$$

考虑 Δ 上的亚纯微分 $\pi\cdot\eta$; 因为 η 在弧 δ_i 上是光滑的, 所以 $\pi\cdot\eta$ 沿着 Δ 的边缘的积分有明确的定义, 并且, 通过与第一互反定律同样的讨论得到

$$\int_{\partial\Delta}\pi\cdot\eta=\sum_{i=1}^{g}(\Pi^i N^{g+i}-\Pi^{g+i}N^i)。$$

另一方面, 在如上局域坐标为 z 的 η 的奇异点 p 附近, 有

$$\pi(z)=\int_{s_0}^{p}\omega+b_0^p z+\frac{1}{2}b_1^p z^2+\frac{1}{3}b_2^p z^3+\cdots,$$

使得

$$\int_{\partial\Delta}\pi\cdot\eta=2\pi\sqrt{-1}\sum_p\mathrm{Res}_p(\pi\cdot\eta)=2\pi\sqrt{-1}\sum_p\left[\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{-j}^p\cdot b_{j-2}^p}{j-1}\right]。$$

因此, 我们得到, 第一和第二类微分的互反定律为

$$\sum_{i=1}^{g}(\Pi^i N^{g+i}-\Pi^{g+i}N^i)=2\pi\sqrt{-1}\sum_{p,j}\frac{a_{-j}^p\cdot b_{j-2}^p}{j-1}。$$

所述的这两个互反定律只是我们在曲线的讨论中所要用到的。但是应该指出, 多花一点力气就可以用同样的方法得到更一般的定律。例如, 在给出的两个公式的任一个中, 我们可以把 ω 取作第二类微分: 那么, 函数

$$\pi(s) = \int_{s_0}^{s} \omega$$

是亚纯函数, 但仍然有明确的定义, 并且, 再一次我们得到

$$\sum (\Pi^i N^{g+i} - \Pi^{g+i} N^i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_p \mathrm{Res}_p(\pi \cdot \eta)。$$

类似地, 如果我们从区间 Δ 切去一些弧, 就可以证明一对第三类微分的互反定律。我们不再推导这些公式——到现在为止, 一般的公式是显而易见的——但是我们只讨论类似得到的一个非常美妙的结果:

定理(Weil): *设 f, g 是紧致 Riemann 曲面上的亚纯函数, 且 (f) 与 (g) 不相交。那么,*

$$\prod_{p \in S} f(p)^{\mathrm{ord}_p(g)} = \prod_{p \in S} g(p)^{\mathrm{ord}_p(f)}。$$

证明: 设 $\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$ 和 Δ 如上所述。设 $\{p_i\}$ 表示 (f) 的支集, $\{q_i\}$ 表示 (g) 的支集, 并且画出从 s_0 到 p_i 的光滑弧 α_i, 除了在它们的公共基点 s_0 之外它们不相交, 并且不包含任何 $\{q_i\}$ 的点。设 Δ' 是 Δ 中弧 α_i 的补集; Δ' 可以再次看作一个多边形, 其边为 $\cdots \delta_i, \delta_{g+i}, \delta_i^{-1}, \delta_{g+i}^{-1}, \cdots, \alpha_i, \alpha_i^{-1}, \cdots$, 如图5所画。因为 Δ' 是单连通的, 并且 f 是 Δ' 中的非零全纯函数, 所以我们可以选择 Δ' 中函数 $\log f$ 的一个单分支; 我们讨论 Δ' 中的亚纯微分

$$\varphi = \log f \cdot d\log g = \log f \cdot \frac{dg}{g}。$$

首先, 因为在每个 q_i 处, dg/g 是留数为 $\mathrm{ord}_{q_i}(g)$ 的单极点, 所以, 由留数定理我们得到,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta'} \varphi &= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{q_i} \mathrm{Res}_{q_i}(\varphi) \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{q_i} \mathrm{ord}_{q_i}(g) \cdot \log f(q_i)。\end{aligned}$$

现在, 对 S 上等价的 $\partial\Delta'$ 上的点 $p \in \delta_i, p' \in \delta_i^{-1}$, 有

$$\log f(p') = \log f(p) + \int_{\delta_{g+i}} d\log f,$$

并且因此得到

$$\int_{\delta_i + \delta_i^{-1}} \varphi = \left(\int_{\delta_i} d\log g \right) \left(-\int_{\delta_{g+i}} d\log f \right),$$

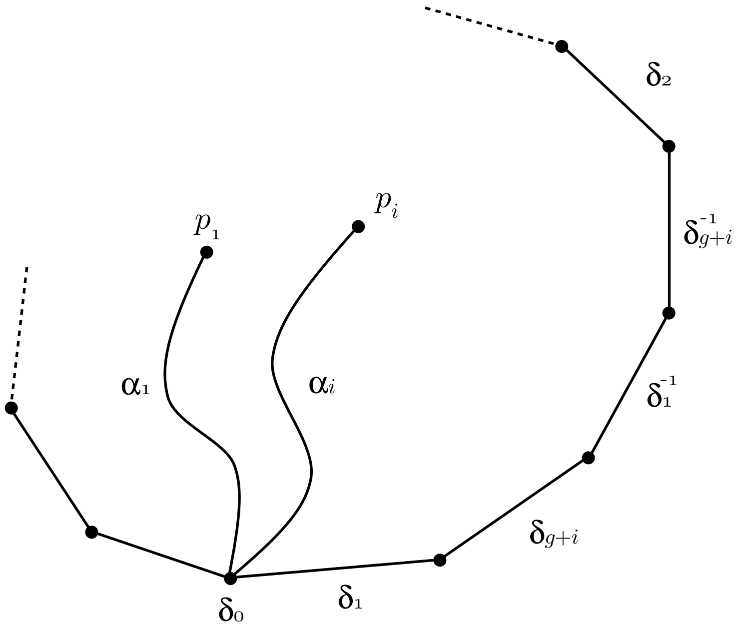


Figure 5

和类似得到

$$\int_{\delta_{g+i}+\delta_{g+i}^{-1}} \varphi = \left(\int_{\delta_{g+i}} d\log g\right)\left(\int_{\delta_i} d\log f\right)。$$

我们还知道, 对 S 上等价的 $\partial\Delta'$ 上的点 $p \in \alpha_i, p' \in \alpha_i^{-1}$, 有

$$\log f(p') - \log f(p) = -2\pi\sqrt{-1}\cdot \mathrm{ord}_{p_i}(f),$$

并且因此得到

$$\int_{\alpha_i+\alpha_i^{-1}} \varphi = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ord}_{p_i}(f)\int_{s_0}^{p_i} d\log g。$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_i+\alpha_i^{-1}} \varphi &= 2\pi\sqrt{-1}\left(\sum \mathrm{ord}_{p_i}(f)\cdot(\log g(p_i) - \log g(s_0))\right)\\ &= 2\pi\sqrt{-1}\sum \mathrm{ord}_{p_i}(f)\cdot \log g(p_i),\end{aligned}$$

这是因为 $\sum_{p_i}\mathrm{ord}_{p_i}(f) = 0$。总之, 我们得到,

$$\begin{aligned}&2\pi\sqrt{-1}\left(\sum \mathrm{ord}_{q_i}(g)\cdot\log f(q_i) - \sum \mathrm{ord}_{p_i}(f)\cdot \log g(p_i)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{g}\left(\left(\int_{\delta_i} d\log f\right)\left(\int_{d_{g+i}} d\log g\right) - \left(\int_{\delta_i} d\log g\right)\left(\int_{d_{g+i}} d\log f\right)\right)。\end{aligned}$$

但是, $\int_{\delta_i} d\log f$ 总是 $2\pi\sqrt{-1}$ 的一个积分因子; 因此上面右边的项是 $(2\pi\sqrt{-1})^2$ 的一个积分因子, 并且我们得到,

$$\sum \mathrm{ord}_{q_i}(g)\cdot\log f(q_i)-\sum \mathrm{ord}_{p_i}(f)\cdot\log g(p_i)\in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}。$$

指数化后我们得到想要的结果:

$$\prod_i f(q_i)^{\mathrm{ord}_{q_i}(g)}=\prod_i g(p_i)^{\mathrm{ord}_{p_i}(f)}。$$

证毕

Riemann–Roch 定理

作为线性系讨论起点的自然问题是: 给定亏格为 g 的 Riemann 曲面 S 上的除子 D, 确定 $H^0(S,\mathscr{O}(D))$ 的维数, 即满足

$$(f)+D\geqslant 0$$

的亚纯函数 f 的数目。

我们首先对 S 上次数为 d 的有效除子 $D=\sum p_\lambda$ 来解答。我们将进一步假定点 p_λ 是不同的——在 D 有多重点的情况下, 在下面的计算中,唯一的差别是更多麻烦的概念而已。

由于 Abel 定理, 所以当用微分表示时, 问题变得容易处理。现在, 如果 $f\in\mathscr{M}(S)$ 满足 $(f)+D\geqslant 0$, 那么, df 是 S 上的亚纯函数, 它在 $S-\{p_\lambda\}$ 上全纯, 且没有周期性, 没有留数, 在每个 p_λ 处有一个次数 $\leqslant 2$ 的极点。反过来, 给定任意这样的微分 η, 亚纯函数

$$f(p)=\int_{p_0}^{p}\eta$$

有明确的定义, 并且满足 $(f)+D\geqslant 0$。因为 $df=df'\Leftrightarrow f=f'+\lambda,\lambda\in\mathbb{C}$, 所以我们得到, $H^0(S,\mathscr{O}(D))$ 的维数比第二类微分的矢量空间的维数大 1, 这个第二类微分在没有周期的 $S-\{p_\lambda\}$ 上全纯, 且在 p_l 处有次数 $\leqslant 2$ 的极点。

由 Kodaira 消没定理, 对任意 $p\in S$, 有

$$H^1(S,\Omega^1(p))=0,$$

并且因此从恰当序列

$$0\to\Omega^1(p)\to\Omega^1(2p)\to\mathbb{C}_p\to 0$$

我们得到, 在 S 上存在一个亚纯形式, 它在 $S-\{p_\lambda\}$ 上全纯, 并且在 p 处有一个双重极点; 显然, 这个形式不能有任何留数。因此, 如果我们设 z_λ 为点 p_λ 周围的局域坐标, 那么, 对任意复数序列 $a_1,\cdots,a_d$, 存在一个 S 上的亚纯 1 形式 η_α, 它在 $S-\{p_\lambda\}$ 上全纯, 并且在 p_l 处有主部

$$\eta_\alpha(z)=\left(a_\lambda\cdot z_\lambda^{-2}+[0]\right)dz_\lambda。$$

因为任意两个这样的形式差一个 S 上的全纯 1 形式, 所以, 我们进一步得到, 存在唯一一个所有 A-周期为零的这样的微分 φ_a。设 $W\cong\mathbb{C}^d$ 表示这样的形式的矢量空间, 并且考虑通过 S 的 $B-$ 闭链上的积分

$$\psi:\varphi_a\mapsto\left(\int_{\delta_{g+1}}\varphi_\alpha,\cdots,\int_{\delta_{2g}}\varphi_a\right)$$

得到的线性映射

$$\psi:W\to\mathbb{C}^g。$$

显然, 上面的矢量空间 V 就是映射 ψ 的核。

为了明确地描写 ψ, 设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 是 $H^0(S,\Omega^1)$ 的归一化基。由第一和第二类微分的互反定律得到,

$$\int_{\delta_{g+j}}\varphi_a=2\pi\sqrt{-1}\sum_\lambda a_\lambda\cdot(\omega_j/dz_\lambda)(p_\lambda),$$

即, 映射 ψ 由下列矩阵给出:

$$\left(\begin{array}{ccc}(\omega_1/dz_1)(p_1)&\cdots&(\omega_1/dz_d)(p_d)\\ \vdots&&\vdots\\ (\omega_g/dz_1)(p_1)&\cdots&(\omega_g/dz_d)(p_d)\end{array}\right)。$$

现在, 在这个矩阵的行矢量之中独立关系的数目就是对所有 λ 在 p_λ 处等于零的线性独立的全纯微分的数目, 即, $H^0(S,\Omega^1(-D))$ 的维数。因此,

$$\begin{aligned}h^0(D)&=\dim(\ker\psi)+1\\&=d-\mathrm{rank}\psi+1\\&=d-g+h^0(K-D)+1。\end{aligned}$$

这就是经典的*Riemann–Roch* 公式。

我们已经证明了有效除子的 Riemann–Roch 定理, 并且因此证明了次数 $\geqslant g$ 的所有除子的 Riemann–Roch 定理。对次数 $\leqslant g-2$ 的一般除子 D, 我们把公式应用到 $K-D$ 得到,

$$\begin{aligned}h^0(K-D)&=(2g-2-d)-g+1+h^0(D)\\&\Rightarrow\ h^0(D)=d-g+1+h^0(K-D)。\end{aligned}$$

最后, 如果 $\deg D=g-1$ 并且 D 或 $K-D$ 都不线性等价于有效除子, 那么, $h^0(D)=h^0(K-D)=0$, 并且公式再次成立。

Riemann–Roch 公式直接给出了线性系性质的图像: 对次数为 d 的一般有效线性系 $D=\sum_{\lambda=1}^d p_\lambda$, 矩阵 $((\omega_i/dz_\lambda)(p_\lambda))$ 有最大秩, 并且因此对 $S^{(d)}$ 中解析子簇外的 D, 得到

$$h^0(D)=\begin{cases}1,&d\leqslant g,\\ d-g+1,&d>g。\end{cases}$$

满足 $h^0(K-D)\neq 0$ 的有效除子 D 称为特殊的; 如果一个特殊除子的伴随线性系比同次数的一般除子的线性系大——即满足 $h^0(K-D)>g-d$, 那么, 它称为非正则的。如果线性系的个别除子是特殊的或非正则的, 那么它称为特殊的或非正则的。

在这里应该提一下, Riemann–Roch 定理可以用层论方法来证明。一般地, 如果 $E\to M$ 是紧致复流形 M 上的全纯矢量丛, 那么, 我们可以把 E 的全纯 *Euler* 示性数定义为

$$\chi(E)=\sum(-1)^p h^p(M,\mathscr{O}(E));$$

我们通常把平庸线丛的全纯 Euler 示性数写作 $\chi(\mathscr{O}_M)$, 即,

$$\chi(\mathscr{O}_M)=\sum(-1)^p h^{0,p}(M)。$$

现在, 对 Riemann 曲面 S 上的线丛 L, 由 Kodaira–Serre 对偶, 我们得到,

$$\begin{aligned}\chi(L) &= h^0(S,\mathscr{O}(L))-h^1(S,\mathscr{O}(L))\\ &= h^0(L)-h^0(K-L)\\ \chi(\mathscr{O}_S) &= h^{0,0}(S)-h^{0,1}(S)\\ &= 1-g,\end{aligned}$$

并且因此 Riemann–Roch 公式可以简单地写作

$$\chi(L)=\chi(\mathscr{O}_S)+c_1(L)。$$

为了证明这种形式的 Riemann–Roch 公式, 我们注意到, 对平庸丛这是显然成立的, 并且证明当且仅当它对 $L'=[D+p]$ 和 $L''=[D-p]$ ($p\in S$ 是任意点)也成立时, 它对任意 $L=[D]$ 成立。容易得到: 恰当层序列

$$0\to\mathscr{O}(D)\to\mathscr{O}(D+p)\to\mathbb{C}_p\to 0$$

给出了恰当上同调序列

$$\begin{aligned}0\to H^0(S,\mathscr{O}(D))\to H^0(S,\mathscr{O}(D+p))&\\ \to\mathbb{C}_p\to H^1(S,\mathscr{O}(D))\to H^1(S,\mathscr{O}(D+p))\to 0,&\end{aligned}$$

并且因为恰当序列中矢量空间的其它维数和等于零, 所以这表明,

$$\chi([D+p])=\chi([D])+1。$$

证毕

虽然 Riemann–Roch 公式的这种描述不如第一种明确, 但是它为推广到高维指出了方法。普遍成立的主要结果是: 紧致复流形上矢量丛 $E\to M$ 的全纯 Euler 示性数是 E 和 M 的拓扑不变量。用这些方法, 经典 Riemann–Roch 公式的本质是对偶 $h^1(D)=h^0(K-D)$。

典范曲线

设 S 是亏格 $\geqslant 2$ 的紧致 Riemann 曲面, K 是 S 上的典范丛。我们立即注意到, 完备线性系 $|K|$ 没有基点: 如果 $p \in S$ 在 $|K|$ 的基点中, 那么我们将得到

$$h^0(K-p) = h^0(K) = g,$$

并且因此由 Riemann–Roch 公式得到

$$h^0(p) = \deg(p) - g + 1 + h^0(K-p) = 1 - g + 1 + g = 2,$$

即, 在 S 上将存在非常数的亚纯函数, 它在 $S - \{p\}$ 上全纯, 并且在 p 处只有一个单极点, 因此, S 双全纯映射到 $\mathbb{P}^1$。所以, 线丛 K 给出一个映射

$$\begin{aligned} \iota_K \ &: \ S \to \mathbb{P}^{g-1} \\ &: \ p \mapsto [\omega_1(p), \cdots, \omega_g(p)], \end{aligned}$$

其中, $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 是 $H^0(S, \Omega^1)$ 的一个基。ι_K 称为 S 的典范映射, $\iota_K(S) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ 称为 S 的典范曲线。

现在, 如果对任意点 $p, q \in S$, 映射 ι_K 是一对一的, 那么, 我们可以找到满足 $\omega(p) = 0, \omega(q) \neq 0$ 的 $\omega \in H^0(S, \Omega^1)$; 如果对任意 $p \in S$, 存在在 p 处正好到一阶等于零的 ω, 那么, 这个映射是一个浸入。因此, ι_K 是一个嵌入, 当且仅当对任意点 p, q(不必不同),

$$h^0(K-p-q) < h^0(K-p) = g - 1。$$

由 Riemann–Roch 公式得到,

$$h^0(K-p-q) = g - 3 + h^0(p+q),$$

并且因此得到

$$h^0(K-p-q) < h^0(K-P) \Leftrightarrow h^0(p+q) = 1。$$

因此, 当且仅当在 S 上存在只有两个极点的亚纯函数时, 即, 如果 S 可以表示为 $\mathbb{P}^1$ 的一个双叶分支覆盖时, ι_K 不能是一个嵌入。这样的 Riemann 曲面称为超椭圆的。超椭圆 Riemann 曲面形成亏格为 g 的所有曲线集合的一个重要子集, 其性质与一般 Riemann 曲面的性质通常差别很大。我们随后在本节中详细讨论它们; 现在, 我们只告诉读者, 亏格 $g \geqslant 3$ 的"一般" Riemann 曲面的确是非超椭圆的。

注意, 如果 $L \to S$ 是次数为 $2g-2$ 的任意线丛, 那么, 由 Riemann–Roch 公式得到

$$h^0(K-D) = \begin{cases} 0 & 如果 D \neq K, \\ 1 & 如果 D = K; \end{cases}$$

如果 $D \neq K$, 那么我们得到 $h^0(D) = g - 1$。这表明: 如果 $S \subset \mathbb{P}^{g-1}$ 是任意亏格为 g 次数为 $2g-2$ 的非退化曲线, 那么 S 是一条典范曲线。

Riemann 曲面的典范曲线是由 S 内蕴地定义, 这样的结果得出许多重要的性质, 并且因此作为一个普遍的定律有: *典范曲线的任意射影不变量反映了 S 的内在结构*。当我们讨论 Weierstrass 点和再次讨论 Torelli 定理时, 将用到这个原理。

我们可以把 Riemann–Roch 公式用典范曲线的几何来重新表述: 对 Riemann 曲面上的任意除子 $D=\sum p_i$, $h^0(K-D)$ 就是 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中包含点 $\iota_K(p_i)$ 的超平面的数目, 并且因此 $h^0(D)$ 的维数等于 D 的次数减去由典范曲线上点 p_i 张开的线性空间的维数。当然, 在这里我们把 D 中多重度为 a_i 的点 p_i 的"线性张开"取为 p_i 以及典范映射前 a_i-1 个微商的张开。最后, 因为 C 上 d 个点的线性张开的维数就是 $d-1$ 再减去这些点上线性独立关系的数目, 所以我们得到 *Riemann–Roch 公式的几何描述*:

包含除子 $D=\sum p_i$ 的完备线性系的维数 r 等于典范曲线上点 p_i 上线性独立关系的数目。

即,

D 的点正好张开了一个 $(d-r-1)$ 维平面。

的确, 在这种几何形式中, Riemann–Roch 公式可以非常简单地被证明。首先, 我们证明不等式

$$(*)\qquad \dim \bar{D} \leqslant (d-1)-\dim|D|。$$

证明: 假设 $D=\sum p_i$ 在 r 维线性系中变化; 即, 在 S 上存在 $r+1$ 个独立的亚纯函数 $f_0,\cdots,f_r$, 满足,

$$(f_\nu)+D\geqslant 0。$$

我们可以取 $f_0=1$; 于是, 没有函数 $f_1,\cdots,f_r$ 的非平庸线性组合使得组合是全纯的。等价地, 如果 z_i 是中心在 p_i 周围的 S 上的局域坐标, 并且我们写出

$$f_\nu(z_i)=a_{\nu,i}z_i^{-1}+\cdots,$$

那么, 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,d} \end{pmatrix}$$

的最大秩为 r。现在, 如果 ω 是 S 上任意全纯 1 形式, 那么, 由留数独立, 对每个 ν 有

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \mathrm{Res}_{p_i}(f_\nu\omega) \\ &= \sum_i a_{\nu,i}\cdot\left(\frac{\omega(p_i)}{dz_i}\right)。\end{aligned}$$

它在典范曲线上的点 p_i 上给出了 r 个线性独立的关系, 因此得到了不等式 $(*)$。

通过把 $(*)$ 应用到 D 的留数数列 $K-D$, 现在我们可以证明相反的不等式。假设在典范曲线上有

$$\dim \overline{D} = d - s - 1。$$

那么, 包含 D 的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中的超平面切掉一个维数为

$$(g-1)-(d-s-1)-1 = g-d+s-1$$

的 $|K-D|$ 的线性子数列。那么, 把 $(*)$ 应用到除子 $E \in |K-D|$ 后我们得到,

$$\begin{aligned} \dim \bar{D} &\leqslant \deg E - 1 - (g-d+s-1) \\ &= (2g-2-d)-1-(g-d+s-1) \\ &= g-s-2。 \end{aligned}$$

但是, 现在包含 E 的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中的超平面将在 S 上切掉维数至少为

$$(g-1)-(g-s-2)-1 = s$$

的 $|D|$ 的线性子数列, 即,

$$\dim |D| \geqslant s = d - 1 - \dim \bar{D},$$

并且因此证明了 Riemann–Roch 公式。

特殊线性系 I

Riemann–Roch 定理精确地描写了 Riemann 曲面上"一般"线性系的性质, 但是对非正则线性系它没什么作用。我们现在将用经典定理来弥补这个缺陷——这些定理给出了特殊线性系的维数,次数和亏格之间的关系。我们的基本引理是

引理: 对非退化曲线 $C \subset \mathbb{P}^n$, C 的一般超平面截面的点都处在一般位置上, 即, 它们的 n 个点是线性独立的。

证明: 假设 C 的次数为 d, 并且设 $H_0 \subset \mathbb{P}^n$ 是与 C 相交于 d 个不同点 $p_1, \cdots, p_d$ 的超平面。那么, 对 $\mathbb{P}^{n*}$ 中 H_0 的足够小的邻域 U 中的 H, H 与 C 的交点 $\{p_i(H)\}$ 将随 $H \in \mathbb{P}^{n*}$ 全纯地变化。因此, 对每个多重指标 $I = \{i_1, \cdots, i_n\} \subset \{1, \cdots, d\}$, 我们得到一个映射

$$\begin{aligned} \pi_I \ &: \ U \to C^n = C \times C \times \cdots \times C, \\ &: \ H \mapsto (p_{i_1}(H), \cdots, p_{i_n}(H)); \end{aligned}$$

还有, 因为对足够靠近 $\pi_I(H_0)$ 的任意点 $(q_1, \cdots, q_n) \in C^n$, 有一个包含 $q_1, \cdots, q_n$ 的超平面 $H \in U$, 所以, U 在 π_I 下的像包含 C^n 中的一个开集。

现在, 设 $D \subset C^n$ 是点 $(q_1, \cdots, q_n)$ 的轨迹, 使得 $q_1, \cdots, q_n$ 不是线性独立的。因为 C 是非退化的, 所以 D 是 C^n 的真解析子簇, 并且因此 $\pi_I^{-1}(D)$ 同样也是 U 的真子簇。于是, 对 $H \in U - \cup_I \pi_I^{-1}(D)$, $H \cap C$ 的点处在一般位置上。 证毕

现在, 我们可以如下来表征线性系 $|D|$ 的维数: 当且仅当对每 t 个点 $p_1, \cdots, p_t \in S$, 存在包含 $p_1, \cdots, p_t$ 的除子 $E \in |D|$ 时, $\dim |D| \geqslant t$。因此, 如果 D 和 D' 是 S 上的两个有效除子, 那么我们可以找到一个除子 $E \sim D + D'$, 它包含 S 的任意 $h^0(D) - 1 + h^0(D') - 1$ 个点, 并且因此我们得到,

$$h^0(D + D') \geqslant h^0(D) + h^0(D') - 1。$$

特别是, 假定 D 是特殊的, 使得 $h^0(K - D) \neq 0$, 且我们可以取 $D' = K - D$。那么, $h^0(D + D') = h^0(K) = g$, 并且我们得到

$$\begin{array}{lcl} h^0(D) + h^0(K - D) & \leqslant & g + 1 \\ h^0(D) - h^0(K - D) & = & d - g + 1 \\ \hline 2h^0(D) & \leqslant & d + 2 \end{array}$$

还要注意, 当且仅当在典范数列 $|D + D'| = |K|$ 中的每个除子是线性系 $|D|$ 的一个除子和来自线性系 $|D'|$ 的一个除子之和时, 上面最后一行的等号成立。但是, 由我们的引理知道, $\iota_K(S)$ 的一般超平面截面的点处在一般位置, 并且因此只有 $D = 0, D = K$ 或 ι_K 不是一对一时, $2h^0(D)$ 等于 $d + 2$。于是, 总结起来我们得到

Clifford 定理: 对紧致 *Riemann* 曲面 S 上的任意两个有效除子, 有

$$\dim |D| + \dim |D'| \leqslant \dim |D + D'|,$$

并且对特殊除子 D, 有

$$\dim |D| \leqslant \frac{d}{2},$$

只有 $D = 0, D = k$ 或者 S 是超椭圆曲线时, 等号成立。

推论: 如果 $C \subset \mathbb{P}^n$ 是次数为 $d < 2n$ 亏格为 g 的任意曲线, 那么有

$$g \leqslant d - n,$$

当且仅当 C 是正规曲线时, 等号成立。

证明: 设 D 是 C 的超平面截面。那么得到,

$$\dim |D| = h^0(D) - 1 = n > \frac{d}{2},$$

并且因此由 Clifford 定理得到 D 是非特殊的。所以 $h^0(K - D) = 0$, 并且由 Riemann–Roch 定理得到

$$\begin{aligned} g &= d - h^0(D) + 1 \\ &\leqslant d - n。 \end{aligned}$$

证毕

当然, 这个上界可以用任意亏格为 $g = d - n$ 的 Riemann 曲面和任意次数为 d 的线性系达到。

现在, 还要找到 $d > 2n$ 时 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的曲线的最大亏格, 或者等价地找到, 当 $d \ll g$ 时, 比 Clifford 定理提供的线性系的维数更准确的上界。我们在这里提出的讨论在1889年由 Castelnuovo 最先给出。

设 $C \subset \mathbb{P}^n$ 是次数为 d 亏格为 g 的曲线, 其超平面截面为 D。考虑线性系 $|kD|$, 其中 $k = 1, 2, \cdots$。由我们的基本引理, 我们可以把 D 的点取在 $\mathbb{P}^n$ 的超平面中的一般位置。

设 $m = [(d-1)/(n-1)]$ 是小于等于 $(d-1)/(n-1)$ 的最大整数, 并且对每个整数 $k \leqslant m$, 选择 D 的 $k(n-1)+1$ 个点的集合 Γ。我们主张, $H^0(C, \mathscr{O}(kD))$ 中对应于 Γ 的每个点的超平面都是独立的; 为此, 对任意点 $q \in \Gamma$, 我们将找出 $\mathbb{P}^n$ 中包含 $\Gamma - \{q\}$ 而不包含 q 的次数为 k 的超曲面。这是容易的: 如果我们把 Γ 的剩下的点分成每个为 $(n-1)$ 个点的 k 个集合

$$\{p_1^1, p_2^1, \cdots, p_{n-1}^1\}, \{p_1^2, \cdots, p_{n-1}^2\}, \cdots, \{p_1^k, \cdots, p_{n-1}^k\},$$

那么, 每个集合 $\{p_\alpha^i\}_\alpha$ 将是线性独立的, 并且它的线性张开不包含 q。因此我们可以找到 $\mathbb{P}^n$ 中的超平面 $H_1, \cdots, H_k$, 它们包含点 $\{p_\alpha^i\}_\alpha$ 但不包含 q; 求和 $H_1 + \cdots + H_k$ 就是所要的次数为 k 的超曲面。

由此我们知道, 在 $H^0(C, \mathscr{O}(kD))$ 中, D 的所有点上等于零的 $[kD]$ 的截面数列开集的余维数至少为 $k(n-1)+1$, 即对 $k \leqslant m$ 有,

$$h^0(kD) - h^0((k-1)D) \geqslant k(n-1)+1。$$

同样的讨论也证明了, 对 $k > m$, 我们可以找到 $\mathbb{P}^n$ 中的 k 个超平面, 它在 D 中除了一个任意点外包含所有的点, 使得对 $k > m$ 有

$$h^0(kD) - h^0((k-1)D) = d。$$

因此我们得到,

$$\begin{aligned}
h^0(D) &\geqslant n+1,\\
h^0(2D) &\geqslant n+1+2(n-1)+1\\
&= 3(n-1)+3,\\
h^0(3D) &\geqslant 6(n-1)+4,\\
&\vdots\\
h^0(mD) &\geqslant \frac{m(m+1)}{2}(n-1)+m+1,\\
&\vdots\\
h^0((l+m)D) &\geqslant \frac{m(m+1)}{2}(n-1)+m+1+ld。
\end{aligned}$$

但是现在, 对足够大的 m, 除子 $(l+m)D$ 不是特殊的。那么, 由 Riemann–Roch 公式, 得到

$$h^0((l+m)D) = (l+m)d - g + 1,$$

使得

$$(*)\qquad g \leqslant (l+m)d\frac{m(m+1)}{2}(n-1) - m - 1 - ld + 1$$
$$= \frac{m(m-1)}{2}(n-1) + m(d - m(n-1) - 1)。$$

因此, $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的非退化曲线的亏格至多为

$$\frac{m(m-1)}{2}(n-1) + m\varepsilon, \quad 其中 m = \left[\frac{d-1}{n-1}\right], d-1 = m(n-1)+\varepsilon。$$

在直纹曲面那节我们将看到, 实际上这个上界对每个 d 和 n 都可以实现, 并且清楚地描写了这些最大亏格的曲线。现在, 我们总结一下关于 $\mathbb{P}^n$ 的非退化曲线一般结果: 如果 C 的次数为 d, 那么,

$$\begin{aligned}
d < n &\Rightarrow C 是退化的,\\
d = n &\Rightarrow C 是有理正规曲线,\\
n < d < 2n &\Rightarrow g \leqslant d-n, 当 C 是正规曲线时等号成立,\\
d = 2n &\Rightarrow g \leqslant n+1, 当且仅当 C 是典范曲线时等号成立,\\
d \geqslant 2n &\Rightarrow g \leqslant \frac{m(m-1)}{2}(n-1) + m\varepsilon,\\
&\quad 其中 m = \left[\frac{d-1}{n-1}\right], d-1 = m(n-1)+\varepsilon。
\end{aligned}$$

注意, 如果 C 达到上界, 那么, 在上面的基本不等式 $(*)$ 中等号必须成立, 并且因此 C 上的完备线性系 $|kD|$ 由次数为 k 的超曲面切出来; 或者换句话说, 于是

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(kH)) = \mathrm{Sym}^k H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H)) \to H^0(C, \mathscr{O}(kH))$$

必须是满射。特别是把它应用到典范曲线上得到

Noether 定理: 对任意非超椭圆曲线 C, 下列映射对所有 l 都是满射:

$$\mathrm{Sym}^l H^0(C, \mathscr{O}(K)) \to H^0(C, \mathscr{O}(lK))。$$

Castelnuovo 不等式可以用两种方法来反过来, 用 d 和 g 给出 n 的上界和用 n 和 g 给出 d 的下界。不做任何处理得到,

$$\begin{aligned}
n &\leqslant \frac{2(l(d-1)-g)}{l(l+1)}, & l &= \left[\frac{2(g-1)}{d}+1\right],\\
d &\geqslant \frac{(j+1)}{2}(n-1) + \frac{g}{j} + 1, & j(j-1) &< \frac{2g}{n-1} \leqslant j(j+1)。
\end{aligned}$$

超椭圆曲线和 Riemann 计数

回想一下, 亏格 $g \geqslant 2$ 的紧致 Riemann 曲面 S 称为超椭圆的, 如果在 S 上存在只有两个极点的亚纯函数 f, 即, 如果 S 容许一个到 Riemann 球面的 $2-1$ 映射 $f: S \to \mathbb{P}^1$。由 Riemann–Hurwitz 公式, 这样的映射 f 的分支点数目由

$$\begin{aligned} b &= 2g-2+2\chi(\mathbb{P}^1) \\ &= 2g+2 \end{aligned}$$

给出; 当然, 因为 f 只有两个叶, 所以它不能有多重分支点。设 $z_1, \cdots, z_{2g+2}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 中 f 的分支点(假定是有限的), 并且考虑曲线 $S' = (w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(z-z_i)) \subset \mathbb{C}^2$ 以及到 z 平面的投影映射 π。因为点 z_i 是不同的, 所以 S' 是光滑的, 并且对 $R > \max(|z_i|)$, 我们得到 $\pi^{-1}(|z| > R)$ 由两个不相交的穿孔圆盘简单组成; 我们可以通过把这些穿孔圆盘用整个圆盘代替来把 S' 完备化到紧致 Riemann 曲面 $\tilde{S}$。通过把两个增加的点映射到 $z=\infty$, 我们可以把映射 $\pi: S' \to \mathbb{C}$ 连续地——从而全纯地——扩张到映射 $\tilde{\pi}: \tilde{S} \to \mathbb{P}^1$。因此, $\tilde{S}$ 又是在点 $\{z_i\}$ 处有分支的 $\mathbb{P}^1$ 的双重覆盖。

现在, 一般地, 如果两个 Riemann 曲面 M, M' 有映射 $f: M \to \mathbb{P}^1, f': M' \to \mathbb{P}^1$, 它们的分支轨迹都是 $B \subset \mathbb{P}^1$, 并且如果作为 $\mathbb{P}^1 - B$ 的拓扑覆盖空间, $f^{-1}(\mathbb{P}^1 - B)$ 与 $f'^{-1}(\mathbb{P}^1 - B)$ 同构, 那么 M 和 M' 是同构的: $f^{-1}(\mathbb{P}^1 - B)$ 和 $f'^{-1}(\mathbb{P}^1 - B)$ 将连续地——从而全纯地——扩张到 f 和 f' 的分支轨迹上。在目前这种情况下, 得到 Riemann 曲面 S 和 $\tilde{S}$ 是同构的, 即, *亏格为 g 的任意超椭圆 Riemann 曲面可以实现为 $\mathbb{C}^2$ 中轨迹*

$$w^2 = g(z)$$

的光滑完备化, 其中 $g(z)$ 是次数为 $2g+2$ 的多项式。

如果 S 是作为 $(w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(z-z_i)) \subset \mathbb{C}^2$ 的完备化而给出的超椭圆 Riemann 曲面, 那么, 我们可以明确地计算 $H^0(S, \Omega^1)$ 的基。首先注意到, 我们有一个由 $j: (w, z) \mapsto (-w, z)$ 给出的阶为 2 的自同构 $j: S \to S$; j 称为 S 上的*超椭圆*对合。诱导线性变换

$$j^*: H^0(S, \Omega^1) \to H^0(S, \Omega^1)$$

的阶同样是 2, 并且因此我们先验地得到 $H^0(S, \Omega^1)$ 到本征值为 $+1$ 和 -1 的本征空间的分解。实际上, $+1$ 本征空间是平庸的, 这是因为 S 上 $j^*\omega = \omega$ 的全纯 1 形式将蜕变而给出 $\mathbb{P}^1$ 上的全纯 1 形式, 这种情况都不存在。因此, 对所有 $\omega \in H^0(S, \Omega^1)$ 我们得到 $j^*\omega = -\omega$。

现在, 考虑 S 上的 1 形式

$$\omega_0 = \frac{dz}{w}。$$

因为 w 等于零的点正好是 dz 的零点, 所以在 ∞ 点以外 ω_0 是全纯非零的。因为 ω_0 的总次数为 $2g-2$, 并且 ω_0 在 S 的处在 $z=\infty$ 的点处有相同次数的极点和零点, 所以在每两个这样的点处 ω_0 必然有次数为 $g-1$ 的零点。如果 ω 是 S 上任意其它的全纯 1 形式, 那么,

$$\omega = h \cdot \omega_0,$$

其中, h 是 S 上的亚纯函数, 在 ∞ 点以外是全纯的。但是, 我们有 $j^*\omega=-\omega, j^*\omega_0=-\omega_0$, 并且因此 $j^*h=h$, 即, h 只是 z 的函数, 且因此必须是 z 的多项式。如果 h 的次数为 d, 那么 h 在 S 的有限部分上有 $2d$ 个零点, 且因此在每个 ∞ 点处有次数为 d 的极点; 因为 ω_0 在 ∞ 处有次数为 $g-1$ 的零点且 $h\cdot\omega_0$ 是全纯的, 那么我们得到 $\deg h\leqslant g-1$。因此, 我们可以写出 $H^0(S,\Omega^1)$ 的一个基:

$$\left\{\frac{dz}{w}, z\frac{dz}{w},\cdots,z^{g-1}\frac{dz}{w}\right\}。$$

于是 S 的典范映射 ι_K 由

$$\iota_K(z,w)=[1,z,\cdots,z^{g-1}]\in\mathbb{P}^{g-1}$$

给出; 在 ι_K 下 S 的像因此是 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中的有理正规曲线。还要注意, 典范映射通过投影 f 得到了一个系数; 因为 ι_K 是内在定义的, 所以映射 f 除了 $\mathbb{P}^1$ 的一个同构外是唯一的。

为了证明不是所有的 Riemann 曲面都是超椭圆的, 我们计算确定超椭圆曲线和亏格为 g 的一般曲线所需要的参数个数。首先, 我们已经知道, 给定 $2g+2$ 个不同点 $z_i\in\mathbb{P}^1$ 的任意集合, 有一个唯一的超椭圆曲线 S, 它有一个有分支轨迹 $B=\{z_i\}$ 的 2 重映射 $f:S\to\mathbb{P}^1$。通过 $\mathbb{P}^1$ 的自同构, 我们可以把任意 3 个点 $z_1,z_2,z_3\in B$ 分别变成 $0,1$ 和 ∞, 并且因此我们得到, 亏格为 g 的一般超椭圆 Riemann 曲面可以通过确定 $\mathbb{P}^1$ 上的 $(2g+2)-3=2g-1$ 来描述。反过来, 因为除了 $\mathbb{P}^1$ 的一个自同构外 f 是唯一的, 所以任意超椭圆曲线 S 只对应于有限多这样的 $2g-1$ 个点的集合; 因此, 这样的曲线族局域上有 $2g-1$ 个参数。

现在我们将计算描写亏格为 g 的一般 Riemann 曲面所需要的参数个数, 这来自 Riemann 的讨论。任选大于 $2g$ 的一个整数 n。亏格为 g 的任意 Riemann 曲面可以表示为 $\mathbb{P}^1$ 的 n 叶分支覆盖; 这样的映射的分支点的数目由

$$\begin{aligned} b &= 2g-2+n\cdot\chi(\mathbb{P}^1) \\ &= 2n+2g-2 \end{aligned}$$

给出。反过来, 我们主张, 给定次数为 $2n+2g-2$ 的 $\mathbb{P}^1$ 上的任意除子 B, 并且不取多重数 $>n-1$ 的点, 存在有限个亏格为 g 的 Riemann 曲面 S, 它们可表示为分支轨迹为 B 的 $\mathbb{P}^1$ 的 n 叶覆盖。如果 $B=\sum z_i$ 由 $2n+2g-2$ 个不同的点组成, 那么我们将构造这些 Riemann 曲面; 一般情况更复杂, 但是没有概念上的困难。

在 $\mathbb{P}^1$ 中从 z_i 到 z_{i+1} 画不相交的弧 γ_i; 设 $T_1,\cdots,T_n$ 是 $\mathbb{P}^1-\cup\gamma_i$ 的 n 个不相交的复制品。(见图6。) 选择一系列置换 $\sigma_0,\cdots,\sigma_{2n+2g-2}\in S_n$, 它满足 $\sigma_0=\sigma_{2n+2g-2}=e$ 和 $\sigma_j\cdot\sigma_{j+1}^{-1}$ 对每个 j 为一个非平庸的简单对换, 并使得 $\{\sigma_j\}$ 在 $\{1,\cdots,n\}$ 上可迁; 我们总可以找到有限个这样的系列。对每个满足 $1\leqslant i\leqslant 2n+2g-3$ 的 i, 把弧 γ_i 的 n 个复制品 $\{\gamma_i^j\}_j$ 添加到 $\cup_j T_j$, 其中, γ_i^j 与沿着割线 γ_i 的上边界的 T_j 的边缘等价, 并且与沿着割线 γ_i 的下边界的 $T_{\sigma_i(j)}$ 的边缘等价。设 S 是所得到的拓扑空间, $f:S\to\mathbb{P}^1$ 显然是投影映射。$f^{-1}(\mathbb{P}^1-B)\subset S$ 是 $\mathbb{P}^1-B$ 的覆盖空间, 并且因此唯一继承了复结构; 按照映射 f 在

$p \in f^{-1}(z_i)$ 点的邻域中是 $1-1$ 或 $2-1$ 的把点 p 处的局域坐标取为 $(z-z_i)$ 或 $\sqrt{z-z_i}$ 后, 这个结构扩张到整个 S 上。因此, S 是映射到 $\mathbb{P}^1$ 的分支轨迹为 B 的紧致 Riemann 曲面, 并且由前面的评论得到, S 完全由构造中所作出的置换 σ_i 的选择而确定。

我们已经知道, 上述任意次数为 $2n+2g-2$ 的除子 B 对应于有限个亏格为 g 的 Riemann 曲面以及到 $\mathbb{P}^1$ 的 n 重映射 f。剩下的是要知道, 多少个这样的除子对应一个这样的 Riemann 曲面 S。现在, 通过首先给出 S 上映射 f 的极除子 $D=(f)_\infty \in S^{(n)}$, 接着把线性系 $H^0(S, \mathscr{O}([D]))$ 的元素对应到 f, 就可以确定这个映射。显然, D 的选择依赖于 n 个参数; 因为 $n>2g$, 所以 $h^0(K-D)=0$, 并且由 Riemann–Roch 定理得到,

$$h^0(D)=n-g+1,$$

所以 $f \in H^0(S, \mathscr{O}([D]))$ 的选择只依赖于 $n-g+1$ 个参数。因此, n 重映射 $f: S \to \mathbb{P}^1$ 族的维数为

$$n+(n-g+1)=2n-g+1。$$

因为上面除子 B 族的维数为 $(2n+2g-2)$, 所以在局域上亏格为 g 的一般 Riemann 曲面依赖于

$$2n+2g-2-(2n-g+1)=3g-3$$

个参数。特别是, 我们注意到, 对 $g \geqslant 3$, 亏格为 g 的“一般” Riemann 曲面是非超椭圆的。

验证一下 $g=3,4$ 和 5 时的 Riemann 计数是有意思的。首先, 就象我们已经看到的, 亏格为 3 的任意 Riemann 曲面的典范曲线是 $\mathbb{P}^2$ 中的四次曲线, 并且除了 $\mathbb{P}^2$ 的一个自同构外是确定的, 反过来, 如果 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一条光滑四次曲线, 由从属公式得到,

$$\begin{aligned} K_C &= (K_{\mathbb{P}^2}+C)|_C \\ &= (-3H+4H)|_C \\ &= H|_C, \end{aligned}$$

所以 C 是典范曲线。现在, $\mathbb{P}^2$ 中四次曲线空间维数为

$$\binom{6}{2}-1=\frac{6\cdot 5}{2}-1=14,$$

并且 $\dim PGL_3=9-1=8$; 因此, 亏格为 3 的曲线依赖于 $14-8=6$ 个参数, 就象所预言的那样。

接下来, 设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是亏格为 4 的典范曲线。由 Riemann–Roch 公式, 因为 $2K_C$ 是非特殊的, 所以

$$h^0(C, 2K_C)=12-4+1=9。$$

但是 $h^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(2H))=10$, 并且因此限制映射

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(2H)) &\to H^0(C, \mathscr{O}(2H_C)) \\ &= H^0(C, 2K_C) \end{aligned}$$

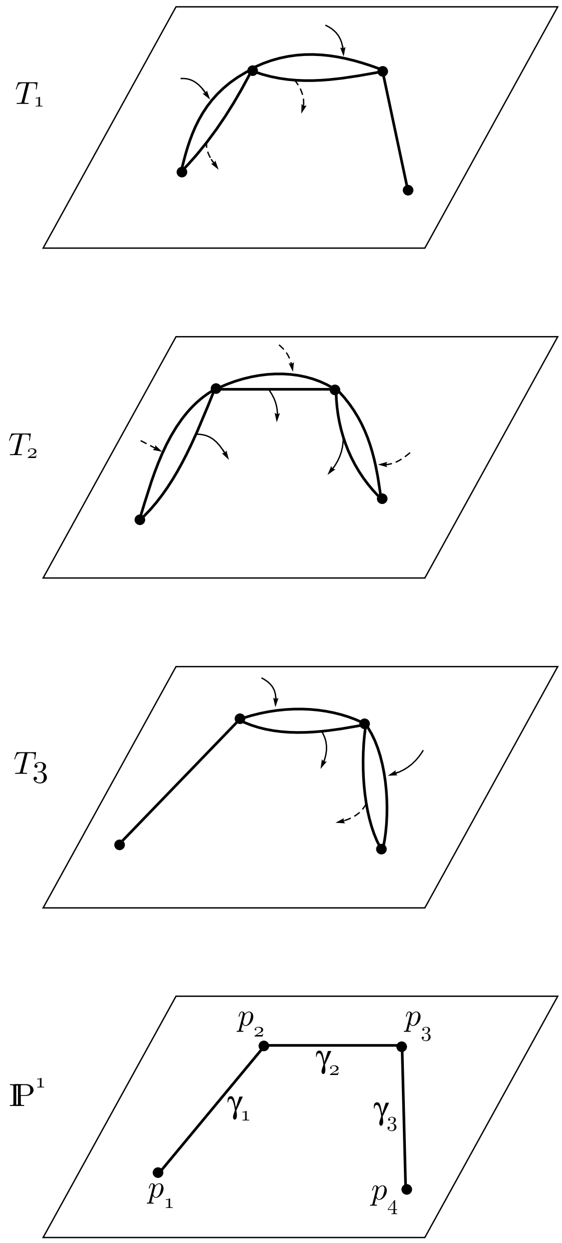


Figure 6 An Example: $\sigma_1=(1,2)$, $\sigma_2=(1,3,2)$, $\sigma_3=(2,3)$.

有一个核, 即, C 处在二次曲面 Q 上; 因为一个可约的二次曲面由两个平面组成, 并且因此不能包含 C, 所以 Q 是不可约的。还有, 因为

$$h^0(C, 3K_C) = 18 - 4 + 1 = 15$$

和

$$h^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(3H)) = 20,$$

所以 C 处在 $\mathbb{P}^3$ 中的三次曲面的四维线性系上。包含 Q 的三次曲面线性系维数只有 $h^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(3H - Q)) - 1 = h^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(H)) - 1 = 3$, 并且因此 C 还处在不包含 Q 的三次曲面上。因为 Q 是不可约的, 所以 Q 和 Q' 必然相交于 6 次曲线; 但是, $C \subset Q \cap Q'$ 且 $\deg C = 6$, 所以

$$C = Q \cap Q'。$$

反过来, 由从属公式, 对相交于光滑曲线 C 的任意三次曲面 Q' 和二次曲面 Q, 我们得到,

$$\begin{aligned} K_Q &= (K_{\mathbb{P}^3} + Q')|_{Q'} \\ &= (-4H + 3H)|_{Q'} = -H_{Q'}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} K_C &= (K_{Q'} + Q)|_C \\ &= (-H + 2H)|_C = H|_C, \end{aligned}$$

所以, C 是亏格为 4 的典范曲线。

现在, 就象我们以前所说的那样, 二次曲面 Q 依赖于 9 个参数。两个三次多项式将在 Q 上切出同样的曲线, 只要它们的差别在 Q 上总等于零; Q 上等于零的三次多项式的矢量空间的维数为

$$h^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(3H - 2H)) = 4,$$

并且因此, 对选定的 Q, Q' 的选择只依赖于

$$19 - 4 = 15$$

个参数。还有, Bertini 定理保证了, 一般配对 (Q, Q') 的确横截相交。最后, PGL_4 的维数为 15, 并且因此在局域上描写亏格为 4 的曲线所需要的参数数目为

$$9 + 15 - 15 = 9,$$

与所期望的一样。

$g = 5$ 的情况有点更简单。对亏格为 5 的典范曲线 $C \subset \mathbb{P}^4$, 我们得到,

$$h^0(C, 2K_C) = 16 - 5 + 1 = 12。$$

但是,

$$h^0(\mathbb{P}^4, \mathscr{O}(2H)) = \binom{6}{4} = 15,$$

因此曲线 C 必须处在三个独立的二次曲面 Q, Q' 和 Q'' 上; 由第四章第三节的 Enriques 定理, 它一般是这些二次曲面的交集。反过来, 如果 Q, Q' 和 Q'' 是 $\mathbb{P}^4$ 中横截相交的任意三个二次曲面, 把从属公式应用三次得到, C 是亏格为 5 的典范曲线。

现在, 通过确定 $\mathbb{P}^4$ 上次数为 2 的多项式矢量空间的一个三维子矢量空间, 即, 通过在 Grassmann 流形 $G = G(3, H^0(\mathbb{P}^4, \mathscr{O}(3H))$ 中的一个点, 就确定了 C。 G 的维数为 $3(15-3) = 36$, 并且由 Bertini 定理, 应用三次后我们得到, 对应于 G 的一般点的二次曲面线性系实际上的确相交于一条光滑曲线。 PGL_5 是 24 维的, 并且因此我们得到, 亏格为 5 的曲线在局域上依赖于

$$36 - 24 = 12$$

个参数。

特殊线性系 II

在本节的前些时候, 我们曾问: $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的非退化曲线可能的最大亏格是多少? 转换一下, 这等价于问: 亏格为 g 的 Riemann 曲面 S 上, 次数为 d 的线性系的可能的最大维数(或维数为 n 的线性系可能的最小次数)——不考虑通过 S 的商可因子分解的那些——是多少? 我们给出这个问题的答案(我们后面将看到它是正确的答案), 但是, 就象我们现在看到的一样, 如果 $d > 2n$ 或 $n > 2g$, 那么这个上界不能由亏格为 g 的每个 Riemann 曲面来实现。例如, 我们已经知道, d 次平面曲线可能的最大亏格是 $(d-1)(d-2)/2$; 并且当然这个上界是严格的, 通过任意光滑平面曲线来得到。亏格为 g 的曲线 S 上二维线性系的最小次数, 在不包括通过 S 的商可因子分解的那些后, 就是 M, 其中,

$$\frac{(M-1)(M-2)}{2} \geqslant g > \frac{(M-2)(M-3)}{2}。$$

但是, 我们可以看到, 不是每个亏格为 g 的线性系有拥有这样的线性系: 如果 $g = (d-1)(d-2)/2$, 那么, 如此线性系的亏格为 g 的 Riemann 曲面族——即, d 次平面曲线——的维数至多为

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}(dH)) - 1 - \dim PGL_3 = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 9,$$

同时, 所有亏格为 g 的 Riemann 曲面的维数为

$$3g - 3 = \frac{3(d-1)(d-2)}{2} - 3。$$

那么, 对 $d \geqslant 5$, 净次数为 d 的亏格为 $g = (d-1)(d-2)/2$ 的曲线 S 都是例外的。

这个例子提出了另一个问题——Castelnuovo 的补问题: 在亏格为 g 的一般 Riemann 曲面上存在什么样的特殊线性系? 这是 *Brill–Noether* 问题, 我们将在本章后面的部分进一步讨论它。

Brill–Noether 问题的可能答案——不是证明——可以头脑简单地通过维数计算来给出。考虑 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中亏格为 g 的典范曲线 C。由 Riemann–Roch 公式的几何形式, $\dim|D|=r$ 的 d 次有效除子 $D=\sum p_i$ 由 C 上张开 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中 $(d-1-r)$ 维平面的 d 个点组成, 即, C 的 d 维割线的 $(d-r-1)$ 维平面。因此, C 有一个维数为 r 的 d 次线性系, 当且仅当它至少有 d 维割线的 $(d-r-1)$ 维平面的一个 r 维族。

现在, $\mathbb{P}^{g-1}$ 中 $(d-r-1)$ 维平面的 Grassmann 流形 $G=G(d-r,g)$ 的维数为 $(d-r)(g-d+r)$。过点 p 的 $(d-r-1)$ 维平面的子簇 $\sigma_{g-d+r}(p)$ 在 G 中的余维数为 $g-d+r-1$。那么, 我们可以预期, 与 C 相交 d 次的 $(d-r-1)$ 维平面的子簇在 G 中的余维数为 $d(g-d+r-1)$, 所以, 如果

$$(d-r)(g-d+r)-d(g-d+r-1)\geqslant r,$$

那么将存在这样的平面的一个 r 维族。计算后我们看到, 当

$$(d-r)(r+1)-rg\geqslant 0$$

时就是如此。因此, 我们的维数计算提出:

亏格为 g 的一般 Riemann 曲面拥有 r 维 d 次的线性系, 当且仅当

$$d\geqslant \frac{rg}{r+1}+r,$$

并且一般将有这样的线性系的一个 $[(d-r)(r+1)-rg]$ 维族。

显然, 按照现在的情况, 我们的讨论远远不是证明; 在本章最后一节我们将给出单向证明。现在, 我们可以验证 $r=1$ 和 2 的情形。因为在 Riemann 曲面 S 上无基点的 1 维 d 次线性系给出了一个 d 叶映射 $S\to\mathbb{P}^1$, $r=1$ 时的陈述总括为

亏格为 g 的 Riemann 曲面可表示为 $\mathbb{P}^1$ 的

$$d=\left[\frac{g+1}{2}\right]+1$$

个叶的一个分支覆盖, 但叶数不会更少; 如果 g 是偶数, 那么, 它可以用有限种方法来表示(除了 $\mathbb{P}^1$ 的自同构之外), 当 g 是奇数时, 存在这样表示的一维族。

通过参数的计数, 我们可以单向验证它。由 Riemann–Hurwita 公式, 亏格为 g 的曲线到 $\mathbb{P}^1$ 的 d 叶映射有

$$b=2g-2+2d$$

个分支点。于是, 通过我们的一般讨论, 可表示为 $\mathbb{P}^1$ 的 d 叶覆盖的 Riemann 曲面族的维数至多为

$$b-3=2g+2d-5。$$

如果亏格为 g 的一般 Riemann 曲面是如此表示的, 那么, 由 Riemann 计数, 我们得到

$$2g+2d-5\geqslant 3g-3,$$

即,

$$d \geqslant \frac{g}{2} + 1。$$

如果 $r = 2$, 我们的结果可以陈述为:

一般 Riemann 曲面可以表示为

$$d = \left[\frac{2g+2}{3}\right] + 2$$

次平面曲线, 次数不会更小。

我们可以再次单向验证它。在所有 d 次平面曲线的线性系中, 有一个二重点或更糟的曲线形成余维数为 1 的一个子簇, 并且这样的一般曲线只有一个普通二重点。类似地, 如果 $\delta \leqslant (d-1)(d-2)/2$, 那么有 δ 个普通二重点或更糟的 d 次曲线簇的余维数为 δ, 并且这样的一般曲线只有 δ 个普通二重点。现在, 就象我们将在下节看到的那样, 有 δ 个普通二重点的 d 次一般曲线的亏格为

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta;$$

因此, 存在亏格为 g 的 d 次平面曲线的

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}(dH)) - 1 - \delta &= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 + g - \frac{(d-1)(d-2)}{2} \\ &= 3d + g - 1 \end{aligned}$$

维族。因为群 PGL_3 作用在这样的曲线族上, 所以这样表示的 Riemann 曲面的数目的维数为

$$3d + g - 1 - 8 = 3d + g - 9。$$

因此, 亏格为 g 的一般 Riemann 曲面可用这种方法表示, 只要

$$3d + g - 9 \geqslant 3g - 3,$$

即

$$d \geqslant \frac{2}{3}g + 2,$$

这就是预期的结果。

一些有趣的枚举问题来自这个讨论。例如, 我们已经知道, 亏格为 g 的一般 Riemann 曲面有有限个次数为 $k+1$ 的束; 我们可以问问有多少。这个问题在下节相应的讨论中给出 $g = 2, 4, 6$ 和 8 时的答案, 一般解答在最后一节。

4. Plücker 公式

伴随曲线

在本节, 我们将讨论曲线的外在几何, 即曲线 $C \subset \mathbb{P}^n$ 必须利用嵌入来研究的性质。在一定的广度上, 伴随曲线的研究是经典欧氏微分几何的 Fernet 公式的复几何对应。但是, 由于复解析结构, 这个课题非常丰富; 我们将得到在 C^∞ 情形下无法得到的定量和定性结果。

在讨论前, 我们先注释一下。显然, 如果 $f: S \to \mathbb{P}^n$ 是 Riemann 曲面到射影空间的任意映射, 那么, 我们可以在局域上把 f 提升到 $\mathbb{C}^{n+1}$——即, 在任意点 $p \in S$ 的邻域中, 我们可以找到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个全纯矢量值函数 v, 使得 $f(z) = [v_0(z), \cdots, v_n(z)]$。反过来, 对任意矢量值函数 $v: S \to \mathbb{C}^{n+1}$, 即使 $v = 0$ 是孤立点, 映射 $f(z) = [v_0(z), \cdots, v_n(z)]$ 也有明确的定义。为此, 直接设 z 是中心在 v 的一个零点 p 周围的局域坐标; 那么, 如果 $k = \min(\mathrm{ord}_p v_i)$, 那么, 映射

$$\tilde{f}(z) = [z^{-k} v_0(z), \cdots, z^{-k} v_n(z)]$$

有明确的定义, 并且扩张为 f。

现在, 假设 S 是紧致 Riemann 曲面, 并且 $f: S \to \mathbb{P}^n$ 是到 $\mathbb{P}^n$ 的非退化映射。设 f 在局域上由矢量函数 $v(z) = [v_0(z), \cdots, v_n(z)]$ 给出。我们定义 f 的第 k 阶伴随曲线

$$f_k: S \to G(k+1, n+1) \subset \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$$

为

$$f_k(z) = [v(z) \wedge v'(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k)}(z)]。$$

我们强调一下, 这种曲线是抽象 Riemann 曲面以及映射。

为了确保 f_k 有明确的定义, 我们必须验证三个问题: $v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k)}(z)$ 不恒等于零, 除了一个标量因子外它不依赖于提升 v 和局域坐标 z 的选择。为了证明第一个, 假设对某些 $k \leqslant n$ 有 $v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k)}(z) \equiv 0$, 但是 $v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k-1)} \not\equiv 0$。于是, 显然有

$$v^{(k)}(z) \equiv 0 \bmod (v(z), \cdots, v^{(k-1)}(z)),$$

即,

$$\begin{aligned}(v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k-1)}(z))' &= v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k-2)}(z) \wedge v^{(k)}(z) \\ &= \lambda(z) \cdot v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k-1)}(z),\end{aligned}$$

使得 $f_{k-1}(z)$ 必须是常数, 并且 $f(S)$ 处在 $\mathbb{P}^n$ 的 $(k-1)$ 维平面中, 这与我们的非退化假设矛盾。

现在, 设 $\tilde{v}(z) = \rho(z) \cdot v(z)$ 是 f 的另外一个提升。那么,

$$\tilde{v}' = \rho' \cdot v + \rho \cdot v',$$

因此,

$$\tilde{v}' \wedge \tilde{v} = \rho^2 \cdot (v \wedge v'),$$

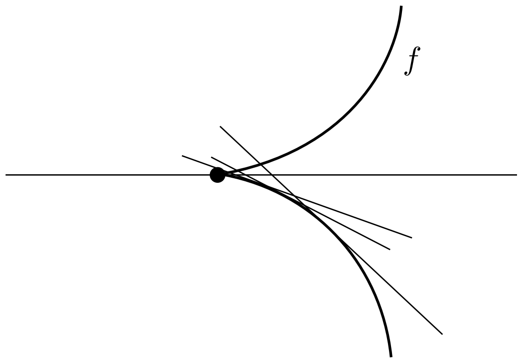


Figure 7

并且一般有

$$\tilde{v} \wedge \cdots \wedge \tilde{v}^{(k)} = \rho^{k+1} \cdot v \wedge \cdots \wedge v^{(k)}。$$

类似地, 设 w 是 S 上的另一个局域坐标。那么,

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

并且因此

$$v \wedge \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w}\left(v \wedge \frac{\partial v}{\partial z}\right)。$$

一般地, 我们将得到,

$$v \wedge \cdots \wedge \frac{\partial^k v}{\partial w^k} = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{k(k+1)/2} v \wedge \cdots \wedge \frac{\partial^k v}{\partial z^k},$$

并且因此 f_k 有明确的定义。

几何上, 对满足 $v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k)}(z) \neq 0$ 的点 $z \in S$, k 维平面 $f_k(z) \subset \mathbb{P}^n$ 是唯一在 z 处与 $f(S)$ 有至少 $k+1$ 阶切触的 k 维平面, 称为**切触 k 维平面**。对平面曲线 $f : S \to \mathbb{P}^n$, 映射 $f_1 : S \to \mathbb{P}^{2*}$ 就是把 $z \in S$ 变成 $f(z)$ 处 $f(S)$ 的切线的 Gauss 映射, 切线 $f_1(S)$ 称为 f 的**对偶曲线**, 通常写作 f^*。注意, 即使在 $f(S)$ 的奇异点 z_0 处, 由本节开始的注释知道, 切线也有明确的定义。实际上, $f_1(z_0)$ 对应于 z_0 处通常所谓的切线: 在邻近点处切线的极限位置。(见图7。)

分歧

设 $f : S \to \mathbb{P}^n$ 是任意曲线, 在欧氏坐标下在 $f(z_0)$ 的邻域由 $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ 给出。我们定义 f 在 z_0 的**分歧指标** $\beta(z_0)$ 为 Jacobi 矩阵 $(\partial f_1/\partial z, \cdots, \partial f_n/\partial z)$ 等于零的阶次, 即,

$$\beta(z_0) = \min\left(\mathrm{ord}_{z_0}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)\right)。$$

显然, 当且仅当映射 f 在 z_0 处光滑时, $\beta(z_0) = 0$; 一般地, $\beta(z_0)$ 是 f 在 z_0 处奇异性的量度。

定义分歧指标的另一种方法如下。设 ω 是 $\mathbb{P}^n$ 上 Fubini–Study 度量的伴随 $(1,1)$ 形式。那么, $\beta(z_0)$ 是唯一的整数, 使得

$$f^*\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}|z-z_0|^{2\beta(z_0)} \cdot h(z) \cdot dz \wedge d\bar{z},$$

其中, $h(z)$ 是 C^∞ 的且在 z_0 处非零。为了说明这两个定义的确等价, 设 $v(z)$ 是 z_0 处 f 的任意提升。那么, 我们得到,

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log\|v(z)\|^2 \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\left(\frac{(v,v')}{(v,v)}d\bar{z}\right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\frac{(v,v)(v',v')-(v,v')(v',v)}{(v,v)^2}dz\wedge d\bar{z} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\frac{1}{\|v\|^4}\cdot\sum_{i\neq j}|v_iv_j'-v_jv_i'|^2\cdot dz\wedge d\bar{z}。\end{aligned}$$

特别是, 我们可以取提升为

$$v(z) = [1, f_1(z), \cdots, f_n(z)];$$

于是,

$$f^*\omega = \frac{\sqrt{-1}\cdot dz\wedge\delta\bar{z}}{2\|v\|^4}\left(\sum_{i-1}^{n}|f_i'|^2 + \sum_{i\neq j}|f_if_j'-f_i'f_j|^2\right),$$

并且因此显然有

$$f^*\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}|z-z_0|^{2\beta(z_0)} \cdot h(z) \cdot dz \wedge d\bar{z},$$

其中, 象原来主张的那样, $\beta(z_0) = \min(\mathrm{ord}_{z_0}(f_i'))$。

现在, 我们不但考虑曲线 $f: S \to \mathbb{P}^n$ 的分歧指标 $\beta(z)$, 而且考虑其伴随曲线的分歧指标 $\beta_k(z)$。为了使得数目 $\beta_k(z_0)$ 对一个给定点 $z_0 \in S$ 可计算, 我们可以如下把曲线放在 z_0 处的正规形式中:

写出 $f(z) = [v(z)] = [v_0(z), \cdots, v_n(z)]$, 其中 $v(z_0) \neq 0$。在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中进行坐标的线性变换后, 我们可以取

$$v(z_0) = (1, 0, \cdots, 0)。$$

我们得到 $v_1(z_0) = \cdots = v_n(z_0) = 0$; 写出

$$(v_1(z), \cdots, v_n(z)) = (z-z_0)^{\alpha_1+1}(v_1^1(z), \cdots, v_n^1(z)),$$

其中 $(v_1^1(z_0), \cdots, v_n^1(z_0)) \neq 0$。现在, 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中做后 n 个坐标的线性变换, 使得 $(v_1^1(z_0), \cdots, v_n^1(z_0)) = (1, 0, \cdots, 0)$; 我们写出

$$(v_2^1(z), \cdots, v_n^1(z)) = (z-z_0)^{\alpha_2+1}(v_2^2(z), \cdots, v_n^2(z)),$$

其中, $(v_2^2(z_0),\cdots,v_n^2(z_0))\neq 0$。我们在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上对后 $n-1$ 个坐标进行变换, 使得 $(v_2^2(z_0),\cdots,v_n^2(z_0))=(1,0,\cdots,0)$, 并且继续如此进行, 最后, 我们得到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个坐标系, 其形式为

$$\begin{aligned} v(z) &= (1+\cdots,(z-z_0)^{\alpha_1+1}+\cdots,(z-z_0)^{2+\alpha_1+\alpha_2}+\cdots,\\ &\quad \cdots,(z-z_0)^{n+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}+\cdots)。\end{aligned}$$

这就称为曲线 f 在 z_0 附近的**正规形式**; 由此我们得到, $f_k(z_0)$ 是由来自序列 $v(z_0),v'(z_0),v''(z_0),\cdots$ 的前 $k+1$ 个线性独立的矢量张开的 $\mathbb{P}^k$。把曲线变为正规形式等于选择 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一组基 $e_0,\cdots,e_n$, 使得 $f_k(z_0)$ 由 $\{e_0,\cdots,e_n\}$ 张成。

现在, 用出现在正规形式的指数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的方式, 我们计算 f 在 z_0 处第 k 阶伴随曲线的分歧指标 $\beta_k(z_0)$: 假定 $z_0=0$, 通过改变第一个元 $v_0(z)\equiv 1$ 来归一化齐次矢量, 并且因此写出

$$v(z)=(1,z^{1+\alpha_1}+\cdots,z^{2+\alpha_1+\alpha_2}+\cdots,\cdots,z^{n+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}+\cdots)。$$

于是 $f_k(z)$ 的齐次坐标是下列矩阵的 $(k+1)\times(k+1)$ 子式的行列式:

$$\begin{pmatrix} v(z)\\ v'(z)\\ \\ \vdots\\ v^{(k)}(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\cdots & z^{1+\alpha_1}+\cdots & z^{2+\alpha_1+\alpha_2}+\cdots & \cdots & z^{n+\alpha_1+\cdots+\alpha-n}+\cdots\\ 0 & (1+\alpha_1)z^{\alpha_1}+\cdots & & & \\ 0 & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}。$$

在 0 处到最少阶行列式等于零的子式显然是左边的子式 Λ_{I_0}, $I_0=\{1,\cdots,k+1\}$, 并且因此我们可以把 z_0 附近 $f_k(S)$ 上的欧氏坐标取为商 $\{|\Lambda_I|/|\Lambda_{I_0}|\}_I$; 在 0 处到最小阶行列式等于零而不是 Λ_{I_0} 的子式为 Λ_J, $J=\{1,\cdots,k,k+2\}$, 并且因此 z_0 处 f_k 的分歧指标是

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{|\Lambda_J(z)|}{|\Lambda_{I_0}(z)|}\right)$$

等于零的阶次。现在, 我们得到,

$$|\Lambda_{I_0}(z)|=z^{k\alpha_1+\cdots+\alpha_k}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1+1 & \cdots & k+\alpha-1+\cdots+\alpha_{k-1}\\ \alpha_1(\alpha_1+1) & & \vdots\\ \vdots & & \\ & \cdots & \end{vmatrix}+\cdots,$$

且

$$|\Lambda_J(z)|=z^{k\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1}+1}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1+1 & \cdots & k+\alpha-1+\cdots+\alpha_k\\ \alpha_1(\alpha_1+1) & & \vdots\\ \vdots & & \\ & \cdots & \end{vmatrix}+\cdots,$$

而且因为出现在右边的行列式都不等于零, 所以

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(\frac{|\Lambda_J(z)|}{|\Lambda_{I_0}(z)|}\right) = \alpha_{k+1} + 1,$$

因此,

$$\beta_k(z_0) = \alpha_{k+1}。$$

一般 Plücker 公式 I

现在, 我们的目的是把曲线 $f : S \to \mathbb{P}^n$ 的伴随曲线 f_k 的两个不变量联系起来: $f_k : S \to \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$ 的次数 d_k(或者, 当愿意把 f_k 看作到 $G(k+1, n+1)$ 的映射时, f_k 与 Schubert 闭链 σ_1 的相交数, 即, $S \subset \mathbb{P}^n$ 的切触 k 维平面与 $\mathbb{P}^n$ 中 $(n-k-1)$ 维一般平面相交的数目)和 f_k 的总分歧 β_k——它定义为所有 $z \in S$ 上 $\beta_k(z)$ 的和。我们通过考虑 $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$ 上保证度量的 S 的拖回 $f_k^*(ds^2)$ 来讨论。一方面, 除了 f_k 的奇异点外, $f_k^*(ds^2)$ 是 S 上的度量, 并且因此通过 Gauss–Bonnet 那种类型的讨论, 我们可以把 S 上它的曲率形式的积分表示为 S 的亏格和 β_k 的函数; 另一方面, 我们可以直接计算它的曲率形式, 并且把它与各种伴随曲线的次数 d_k联系起来。

首先, 我们称 Riemann 曲面的切丛上的半正定内积 φ 是**赝度量**, 如果它在局域上定义为

$$\varphi = h(z) \cdot dz \otimes d\bar{z},$$

其中,

$$h(z) = |z|^{2\nu} \cdot h_0(z)$$

满足

$$h_0(z) > 0。$$

我们称 φ 在 $z = 0$ 处有阶次为 ν 的零点, 并且写作 $\mathrm{ord}_p(\varphi) = \nu$; 除子

$$D_\varphi = \sum_{p \in S} \mathrm{ord}_p(\varphi) \cdot p$$

称为赝度量 φ 的奇异除子。实际上, φ 在线丛 $T' \otimes [D_\varphi]$ 上定义了一个忠实度量: 如果我们把 $T' \otimes [D_\varphi]$ 的截面与 p 处至多有 $\mathrm{ord}_p(\varphi)$ 次极点的亚纯矢量场 $\theta = f(z) \cdot (\partial/\partial z)$ 等价, 那么内积

$$(\theta, \theta) = |f(z)|^2 \cdot h(z)$$

将是明确定义的度量。现在, φ 的曲率形式 Θ, 在看作 $T' \otimes [D_\varphi]$ 上的度量后, 由

$$\Theta = -\partial\bar{\partial} \log h(z)$$

给出, 并且因此从第141页的命题得到,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_S \Theta &= \deg(T' + D_\varphi) \\ &= 2 - 2g + \deg(D_\varphi)。\end{aligned}$$

特别是, 如果我们把 $\varphi = f_k^*(ds^2)$ 取为由 $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$ 上标准度量的 f_k 的拖回, 那么,

$$D_\varphi = \sum_{p\in S} \beta_k(p)\cdot p,$$

并且因此如果 Θ 是 φ 的曲率形式, 那么,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_S \Theta = 2 - 2g + \beta_k。$$

现在, 问题是直接计算赝度量 $f_k^*(ds^2)$ 的曲率形式。设 ω 是 $\mathbb{P}^n$ 上伴随于 Fubini–Study 度量的 $(1,1)$ 形式; 设 $v(z)$ 为如前的 f 的一个提升, 并且设 $\Lambda_k(z) = v(z)\wedge\cdots\wedge v^{(k)}(z) \in \Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1}$。那么, 我们得到

无穷小 Plücker 公式:

$$f_k^*(\omega) = \frac{\|\Lambda_{k-1}\|^2\cdot\|\Lambda_{k+1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{2}dz\wedge d\bar{z}。$$

证明: 首先注意到, 右边的表达式不依赖于提升的选择, 正如它所必需的那样。现在, 如果 $\tilde{v}(z) = \rho(z)\cdot v(z)$ 是另一个提升, 那么我们得到,

$$\begin{aligned}\tilde{v}' &= \rho'\cdot v + \rho\cdot v', \\ \tilde{v}'' &= \rho''\cdot v + 2\cdot\rho'\cdot v' + \rho\cdot v'' \\ &\vdots \\ \tilde{v}^{(k+1)} &= \rho^{(k+1)}\cdot v + \binom{k+1}{1}\rho^{(k)}v' + \cdots + \binom{k+1}{k}\rho' v^{(k)} + \rho\cdot v^{(k+1)}。\end{aligned}$$

特别是, 我们发现, 我们可以找到 $\rho(z_0)\neq 0$ 的函数 ρ, 使得 $\tilde{v}^{(k+1)}(z_0)$ 与 $v(z_0), v'(z_0), \cdots, v^{(k)}(z_0)$ 正交, 并且因此与 $\tilde{v}(z_0), \tilde{v}'(z_0), \cdots, \tilde{v}^{(k)}(z_0)$ 正交; 即, 在 $\Lambda_{k+1}(z_0)\neq 0$ 的任意点 z_0, 我们可以选择一个提升, 使得 $v^{(k+1)}(z_0)$ 与 $v(z_0), \cdots, v^{(k)}(z_0)$ 正交。

现在, 写出

$$\begin{aligned}f_k^*(\omega) &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log\|\Lambda_k\|^2 \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\left(\frac{(\Lambda_k,\Lambda_k')}{(\Lambda_k,\Lambda_k)}d\bar{z}\right) \\ &= \left(\frac{(\Lambda_k,\Lambda_k)(\Lambda_k',\Lambda_k') - (\Lambda_k,\Lambda_k')(\Lambda_k',\Lambda_k)}{(\Lambda_k,\Lambda_k)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{-1}}{2}dz\wedge d\bar{z},\end{aligned}$$

其中,

$$\Lambda_k' = v \wedge v' \wedge \cdots \wedge v^{(k-1)} \wedge v^{(k+1)}。$$

设 $V_0 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 是 $v(z_0), \cdots, v^{(k)}(z_0)$ 的线性张开; 设 $V_0^\perp$ 表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中 V_0 的正交补。那么, 分解 $\mathbb{C}^{n+1} = V_0 \otimes V_0^\perp$ 给出作为内积空间的 $\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1}$ 的分解

$$\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1} = \bigoplus_{p+q=k+1} (\Lambda^p V_0 \otimes \Lambda^q V_0^\perp),$$

并且它在每个因子 $\Lambda^p V_0 \otimes \Lambda^q(V_0^\perp)$ 上有诱导度量。如果我们假定 $v^{(k+1)}(z_0) \in V_0^\perp$, 那么我们得到,

$$\Lambda_k(z_0) \in \Lambda^{k+1} V_0, \quad \Lambda_k'(z_0) \in \Lambda^k V_0 \otimes \Lambda^1 V_0^\perp;$$

因此,

$$\begin{aligned} (\Lambda_k(z_0), \Lambda_k'(z_0)) &= 0, \\ (\Lambda_k'(z_0), \Lambda_k'(z_0)) &= \|\Lambda_{k-1}(z_0)\|^2 \cdot \|v^{(k+1)}(z_0)\|^2, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} (\Lambda_k(z_0), \Lambda_k(z_0)) \cdot (\Lambda_k'(z_0), \Lambda_k'(z_0)) &= \|\Lambda_{k-1}(z_0)\|^2 \cdot \|v^{(k+1)}(z_0)\|^2 \cdot \|\Lambda_k(z_0)\|^2 \\ &= \|\Lambda_{k-1}(z_0)\|^2 \cdot \|\Lambda_{k+1}(z_0)\|^2, \end{aligned}$$

这就证明了引理。 证毕

于是, 赝度量 $f_k^*(ds^2)$ 的曲率形式由

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{2}\Theta &= \frac{-\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\|\Lambda_{k+1}\|^2 \cdot \|\Lambda_{k-1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4}\right) \\ &= -f_{k-1}^*(\omega) + 2f_k^*(\omega) - f_{k+1}^*(\omega), \end{aligned}$$

并且因此由 Wirtinger 定理得到,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_S \Theta = -d_{k-1} + 2d_k - d_{k+1}。$$

把它与第一个 $\int_S \Theta$ 的计算相比较, 得到

整体 Plücker 公式:

$$d_{k-1} - 2d_k + d_{k+1} = 2g - 2 - \beta_k。$$

作为 Plücker 的一个直接应用, 我们证明可以通过无变形性质来表征有理正规曲线。

命题: 唯一的整个无分歧曲线 $f: S \to \mathbb{P}^n$ 是有理正规曲线。

证明: 为了去掉 $k > 0$ 的 d_k, 我们可以取各种 Plücker 公式的线性组合:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(d_{k-1} - 2d_k + d_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(2g - 2 - \beta_k),$$

并得到,

$$\sum(n-k)\beta_k=(n+1)d+n(n+1)(g-1)。$$

特别是, 如果对所有 i 有 $\beta_i=0$, 那么,

$$n(n+1)(g-1)<0\Rightarrow g=0,$$

并且因此从这个公式看出,

$$-(n+1)d=-n(n+1),$$

即, $d=n$ 且曲线 S 是有理正规曲线。 证毕

一般 Plücker 公式 II

现在我们希望给出一般 Plücker 公式的第二种证明, 虽然它不容许局域对应, 但是有更多的几何特征。

设 $f:C\to\mathbb{P}^n$ 是非退化曲线, $v(z)$ 是 f 到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的提升, 并且如前把各种特征表示出来:

$$\begin{aligned}\Lambda_k(z)&=v(z)\wedge\cdots\wedge v^{(k)}(z)\in\wedge^{k+1}\mathbb{C}^{n+1},\\ f_k&:C\to G(K=1,n+1)\subset\mathbb{P}(\wedge^{k+1}\mathbb{C}^{n+1}),\\ d_k&=\deg f_k(C)\subset\mathbb{P}(\wedge^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})\\ &={}^{\#}(f_k(C)\cdot\sigma_1)_{G(k+1,n+1)}\\ \beta_k&=\sum_{z\in C}\beta_k(z);\end{aligned}$$

为了方便, 设

$$m=\dim\mathbb{P}(\wedge^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})=\binom{n+1}{k+1}-1。$$

设 V_{m-2} 是 $\mathbb{P}(\wedge^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$ 中的一般 $(m-2)$ 维平面, 与 C 不相交, 并且考虑由从 V_{m-2} 到直线上的投影 $f_k(C)$ 得到的映射

$$\pi_V:C\to\mathbb{P}^1。$$

π_V 的叶数显然就是 $f_k(C)$ 的次数 d_k; 那么, 由 Riemann–Hurwitz 公式得到,

$$2g-2=-2d_k+\tau_k,$$

其中, τ_k 是 π_V 的分支点的数目。

为了计算 τ_k, 把映射 f_k 放在 $z_0\in C$ 处的正规形式中:

$$f_k(z)=[1+\cdots,(z-z_0)^{\gamma_1+1}+\cdots,(z-z_0)^{\gamma_1+\gamma_2+2}+\cdots,\cdots]。$$

(这里的指数 γ_i 是 f_k 的第 $(i-1)$ 次伴随曲线在 z_0 处的分歧指标; 因此, $\gamma_1=\beta_k(z_0)$, 而剩下的整数 $\gamma_2,\cdots$ 与它的行为无关。) 从这个正规形式我们知道, 当超平面 $\overline{V_{m-2},f_k(z_0)}\subset\mathbb{P}^m$

包含 z_0 处 $f_k(C)$ 的切触 l 维平面而不包含切触 $(l+1)$ 维平面时, z_0 正好是阶次为 $(\gamma_{l+1}+\cdots+\gamma_1+l-1)$ 的 π_V 的分支点。特别是, 如果我们选择足够一般的 V_{m-2}——即, 使得 V_{m-2} 不在任何平稳点 f_k 处与 $f_k(C)$ 的切线相交, 并且不与 $f_k(C)$ 的任意点的切触 2 维平面相交于一条直线——那么, $f_k(C)$ 的奇异点 z_0 将是映射 π_V 的阶次为 $\beta_k(z_0)$ 的分支点; 同时, 如果 z_0 处 $f_k(C)$ 的切线 $T_{z_0}(f_k(C))$ 与 V_{m-2} 相交, 那么, $f_k(C)$ 的光滑点 z_0 将是 π_V 的一个单分支点, 否则就不是分支点。因此, π_V 的分支点的数目就是 f_k 的总分歧指标 β_k 加上 $f_k(C)$ 的曲线与 $\mathbb{P}^m$ 中一般 $(m-2)$ 维平面相交的次数——即, $f_k(C)$ 的切直纹面

$$T(f_k(C))=\bigcup_{z\in C}T_z(f_k(C))\subset\mathbb{P}^m$$

的次数。

$\deg T(f_k(C))$ 的计算基于一个观察。$f_k(C)$ 在光滑点 z 处的切线由矢量

$$\Lambda_k(z)=v(z)\wedge v'(z)\wedge\cdots\wedge v^{(k)}(z)$$

和

$$\Lambda'_k(z)=v(z)\wedge v'(z)\wedge\cdots\wedge v^{(k-1)}(z)\wedge v^{(k+1)}(z)$$

张开。因此, 切线

$$T_z(f_k(C))=\{[v(z)\wedge\cdots\wedge v^{(k-1)}(z)\wedge(\lambda_0 v^{(k)}(z)+\lambda_1 v^{(k+1)}(z))]\}_{[\lambda_0,\lambda_1]\in\mathbb{P}^1}$$

完全处在 Grassmann 流形 $G(k+1,n+1)\subset\mathbb{P}^m$ 中——实际上, 它就是 $\mathbb{P}^n$ 中包含 z 处 f 的切触 $(k-1)$ 维平面 $\Lambda_{k-1}(z)$ 且包含于 z 处 f 的切触 $(k+1)$ 维平面 $\Lambda_{k+1}(z)$ 的 k 维平面的 *Schubert* 闭链。因为 $G(k+1,n+1)\subset\mathbb{P}^m$ 的超平面截面为 Schubert 闭链 σ_1, 那么我们可以写出

$$\begin{aligned}\deg T(f_k(C)) &= {}^{\#}(T(f_k(C))\cdot V_{m-2})_{\mathbb{P}^m}\\ &= {}^{\#}(T(f_k(C))\cdot\sigma_1^2)_{G(k+1,n+1)}。\end{aligned}$$

现在, 由第一章第六节的 Schubert 运算得到, σ_1^2 同调于与 $(n-k)$ 维平面 Γ_{n-k} 相交于一条直线的 $\mathbb{P}^n$ 中的 k 维平面的 Schubert 闭链 $\sigma_{1,1}(\Gamma_{n-k})$, 再加上与 $(n-k-2)$ 维平面 Γ_{n-k-2} 相交的 k 维平面的 Schubert 闭链 $\sigma_2(\Gamma_{n-k-2})$。我们还知道, 包含 $\Lambda_{k-1}(z)$ 且包含于 $\Lambda_{k+1}(z)$ 的 $\mathbb{P}^n$ 中的 k 维平面的闭链 $T_z(f_k(C))\subset G(k+1,n+1)$ 将与 Schubert 闭链 $\sigma_2(\Gamma_{n-k-2})$ 相交, 当且仅当 Γ_{n-k-2} 与 Λ_{k+1} 有一个公共点, 使得 $T(f_k(C))$ 与 $G(k+1,n+1)$ 中 σ_2 的相交数就是第 $(k+1)$ 阶切触平面与一般 $(n-k-2)$ 维平面 $\Gamma_{n-k-2}\subset\mathbb{P}^n$ 相交的点 $z\in C$ 的数目, 即, 第 $(k+1)$ 阶伴随曲线 $f_{k+1}(C)$ 的次数 d_{k+1}。类似地, 当 $\Lambda_{k-1}(z)$ 与 Γ_{n-k} 有一个公共点时, $T_z(f_k(C))$ 与闭链 $\sigma_{1,1}(\Gamma_{n-k})$ 正好相交, 因此, $T(f_k(C))$ 与 $\sigma_{1,1}$ 的相交数为第 $(k-1)$ 阶切触平面与一般 $(n-k)$ 维平面 $\Gamma_{n-k}\subset\mathbb{P}^n$ 相交点 $z\in C$ 的数目, 即, 第 $(k-1)$ 阶伴随曲线的次数 d_{k-1}。因此, 我们得到,

$$\begin{aligned}\deg T(f_k(C))\subset\mathbb{P}^m &= {}^{\#}(T(f_k(C))\cdot(\sigma_{1,1}+\sigma_2))_{G(k+1,n+1)}\\ &= d_{k-1}+d_{k+1},\end{aligned}$$

并且因此 π_V 的分支点数目由

$$\tau_K = \beta_k + d_{k-1} + d_{k+1}$$

给出。于是, 从 Riemann–Hurwitz 公式, 我们得到一般的 Plücker 公式:

$$\begin{aligned} 2g-2 &= -2d_k + \tau_k \\ &= -2d_k + \beta_k + d_{k-1} + d_{k+1}。\end{aligned}$$

Weierstrass 点

一般地, Plücker 公式研究的是曲线的外在不变量。但是, 从典范曲线 S 的射影不变量对应于 S 的内在性质这个一般原理, 我们可把 Plücker 公式应用到典范曲线并且如下计算 Riemann 曲面上 Weierstrass 点的数目。

设 S 是亏格为 g 的 Riemann 曲面, $p \in S$ 是任意点, 并且考虑伴随于除子 $k \cdot p, k = 1, 2, \cdots$ 的线性系。由 Riemann–Roch 公式我们知道, 对 $k \geqslant 2g-1$ 有 $h^0(kp) = k - g + 1$, 并且一般有

$$h^0(kp) = \begin{cases} h^0((k-1)p) + 1, & \text{如果存在 } f \in \mathscr{M}(S) \text{ 使得 } (f)_\infty = kp, \\ h^0((k-1)p), & \text{如果不存在 } f \in \mathscr{M}(S) \text{ 使得 } (f)_\infty = kp。\end{cases}$$

因此, 正好存在 g 个正整数 $a_1, \cdots, a_g$ 使得在 S 上不存在 $(f)_\infty = a_i p$ 的亚纯函数 f。这些整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_g$ 称为点 $p \in S$ 的间隙值。

现在, 我们可以预期, 对一般的 $p \in S$, 所有的除子 kp 将是规则的, 即,

$$h^0(kp) = \begin{cases} 1, & k \leqslant g, \\ k - g + 1, & k \geqslant g, \end{cases}$$

使得

$$a_i = 1, \quad i = 1, \cdots, g。$$

我们称点 p 为 S 的 *Weierstrass* 点, 如果任意除子 kp 是不规则的, 或者换句话说, 如果存在 S 上的亚纯函数 f, 它在 $S - \{p\}$ 上全纯, 在 p 处有阶次 $\leqslant g$ 的极点。我们把 Weierstrass 点 p 的权重取为

$$W(p) = \sum (a_i - i),$$

其中, a_i 是 $p \in S$ 的间隙值。例如, 如果 S 是 $h^0(2p) = 2$ 的超椭圆曲线, 那么, p 的间隙值为

$$a_i = 2i - 1,$$

并且 p 称为超椭圆 *Weierstrass* 点; 在标度的另一端, 权重为 1 的点 p 的间隙值为

$$1, 2, 3, \cdots, g-1, g+1$$

——即, 点 p 有来自所预期的方式的最小微商——并且点 p 称为 S 的正规 *Weierstrass* 点。

我们可以用另一种方法来表征非超椭圆 Riemann 曲面 S 上的 Weierstrass 点。设 $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ 为 S 的典范曲线。那么, 由 Riemann–Roch 公式的几何描述, 对任意点 $p \in C$, $h^0(gp) > 1$ 当且仅当点 $p \in C$ 和它的前 $g-1$ 个微商不能张开所有的 $\mathbb{P}^{g-1}$, 即, *p 为 S 的 Weierstrass 点当且仅当它是 C 的任意伴随曲线的一个奇异点*。确切地说, 在中心位于 p 周围的局域坐标 z 下, 如果典范映射 ι_K 为

$$\iota_K(z) = [1, z^{1+\alpha_1} + \cdots, z^{2+\alpha_1+\alpha_2} + \cdots, \cdots, z^{g-1+\alpha_1+\cdots+\alpha_{g-1}} + \cdots],$$

那么, $p \in S$ 的间隙值为

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2 + \alpha_1, \\ a_3 &= 3 + \alpha_1 + \alpha_2, \\ &\vdots \\ a_g &= g + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{g-1}, \end{aligned}$$

并且 p 的权重为

$$\begin{aligned} W(p) &= \sum_{k=1}^{g-1} (g-k)\alpha_k \\ &= \sum_{k=0}^{g-2} (g-k-1)\beta_k(p)。 \end{aligned}$$

现在, 通过应用有理正规曲线的讨论中得到的 Plücker 公式, 我们可以计算 S 上 Weierstrass 点的数目: 设 $d = 2g-2$ 和 $n = g-1$ 后, 我们得到,

$$\sum (g-k-1)\beta_k = g(2g-1) + (g-1)g(g-1) = (g-1)g(g+1),$$

即, *亏格为 g 的 Riemann 曲面上 Weierstrass 点的总权重正好是 $(g-1)\cdot g\cdot(g+1)$。*

Weierstrass 点的意义在于它们是 Riemann 曲面上“被标记”的点, 即, 内在定义的点。例如, 我们可以利用最后这个结果来证明

定理: *亏格 > 1 的任意 Riemann 曲面 S 只有有限个自同构。*

证明: S 的任意自同构必须置换它的 Weierstrass 点; 因为这些点只有有限个, 所以讨论固定 S 的每个 Weierstrass 点的 S 就足够了。现在假设 S 是非超椭圆的。首先, 注意到由 Clifford 定理, 对任意点 $p \in S$, 得到

$$h^0(kp) < \frac{k}{2} + 1,$$

因此,

$$a_i \leqslant 2i - 2, \quad i = 2, \cdots, g,$$

和

$$\begin{aligned} W(p) &= \sum_{i=1}^{g} a_i - i \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{g} i - 2 \\ &\leqslant \frac{(g-1)(g-2)}{2}, \end{aligned}$$

并且因此 S 上不同的 Weierstrass 点的数目至少为

$$\frac{(g-1)(g+1)}{\frac{1}{2}(g-1)(g-2)} = \frac{2g(g+1)}{g-2} \geqslant 2g+6。$$

现在, 假设 S 是非超椭圆的, 并且设 C 是 S 上典范曲线。那么, 任意 S 的自同构由固定 C 的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的自同构所诱导; 设 $\tau : \mathbb{P}^{g-1} \to \mathbb{P}^{g-1}$ 是这样固定 S 的每个 Weierstrass 点的自同构。于是, τ 保持在每个 Weierstrass 点 p_i 处所有的切触平面; 特别是, 如果我们设 V_i 是 p_i 处 C 的切触 $(g-3)$ 维平面, 那么, τ 保持 V_i 和包含 V_i 的超平面束 $\{H_\lambda^i\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$。假设 V_i 包含 C 的不是 p_i 的其它 k 个点。那么, 包含 V_i 的任意超平面与处在 V_i 中的 C 有 $k+g-2$ 个相交点, 并且因此至多包含 V_i 外的 $g-k$ 个 Weierstrass 点。但是, 在 V_i 以外至少有

$$2g+2-(k+1) = 2g-k+1$$

个 C 的 Weierstrass 点。因此, 至少三个超平面 $\{H_\lambda^i\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$ 包含 V_i 外的 Weierstrass 点, 并且因此它们被 τ 所固定; 所以, τ 固定了每个超平面 H_λ^1, 并且因此 τ 有有限阶次, 这是因为 C 的超平面截面是有限的。

现在假设 τ 的阶次为 d, 并且考虑 S 在自同构群 $\{\tau_i\}$ 下的商曲线 S'。投影映射 π 把 S 表示为 S' 的 d 叶覆盖, 其中每个 Weierstrass 点是一个 $(d-1)$ 重分支点; 那么, 我们得到

$$\begin{aligned} 2g-2 &\geqslant d(2g(S')-2) + (d-1)(2g+2) \\ &\geqslant (d-1)(2g-2) + 2d\cdot g(S') + 2(d-2), \end{aligned}$$

所以 $d \geqslant 2 \Rightarrow g(S') = 0$ 且 $d = 2$, 即, S 是超椭圆的。因此, *如果 S 是非超椭圆的, 那么, 固定 S 的 Weierstrass 点的任意自同构是恒等元*, 并且因此在这种情况下证明了定理。

在 S 是超椭圆的情况下, S 的任意自同构由 $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ 模超椭圆对合后给出; 但是 C 是有理的, 并且因此固定 C 的 $2g+2>3$ 个 Weierstrass 点的任意自同构是恒等元。 证毕

现在, 设 S 是亏格 $g \geqslant 3$ 的 Riemann 曲面。由上面最后的结果, 如果 S 的确有自同构, 那么它有阶次为素数 p 的自同构 φ。设 S' 是 S 与自同构群 $\{\varphi_i\}$ 的商, 且 g' 是 S' 的亏格。因为 φ 的任意幂 φ^i 的固定点是 φ 的固定点, 所以商映射 $\pi : S \to S'$ 的分支轨迹直接由相当多 k 的 $(p-1)$ 重分支点组成; 并且, 为了把 S 确定到有限的选择, 我们必须直接确定曲

面 S' 以及 S' 上的 k 个点。它总共有 $3g'+3+k$ 个参数; 但是现在, 由 Riemann–Hurwitz 公式得到,

$$2g-2=p(2g'-2)+k(p-1),$$

即,

$$k=\frac{2g-2-p(2g'-2)}{p-1}=\frac{2g-2pg'}{p-1}+2。$$

因此, 我们至多得到

$$3g'+\frac{2g-2pg'}{p-1}-1$$

个 S 的参数; 并且因为我们必须满足 $g'\geqslant(1/p)(g-1)+1\geqslant\frac{1}{2}(g+1)$, 所以这个数比 $3g-3$ 小。因此, 我们得出结论:

亏格 $g\geqslant 3$ 的一般 Riemann 曲面没有自同构。

用本质上相同的方法, 读者可以验证, 亏格 $g\geqslant 2$ 的 Riemann 曲面的自同构不超过 $84(g-1)$ 个。

关于 Weierstrass 点的最后注记: 通过参数计算我们可以知道, 亏格 $g\geqslant 3$ 的一般 Riemann 曲面没有间隙值为 $a_i>i, i<g$ 的 Weierstrass 点。为此, 假设它不成立——即一般 Riemann 曲面 S 包含 $\dim|(g-1)p|\geqslant 1$ 的点 p。那么, S 可以表示为 $\mathbb{P}^1$ 的一个 $(g-1)$ 叶覆盖, 其中 p 作为阶次为 $g-2$ 的分支点而出现; 这个映射的分支轨迹由 $(g-2)p$ 加上

$$2g-2+2(g-1)-(g-2)=3g-2$$

个其它数组成, 并且因此依赖于 $3g-1$ 个参数。于是, S 至多依赖于 $3g-1-3=3g-4$ 个参数, 出现矛盾。同样, 读者可以验证, 通过计算有 $(g+1)$ 重切线的亏格为 g 的 $g+1$ 次平面曲线的参数数目, 亏格 $g\geqslant 3$ 的一般 Riemann 曲面不包含 $\dim|(g+1)p|\geqslant 3$ 的点 p。这两个结论合起来表明, *亏格 $g\geqslant 3$ 的一般 Riemann 曲面只有正规 Weierstrass 点*。

平面曲线的 Plücker 公式

现在, 我们来讨论平面曲线的射影不变量。它要用到的方法与前面所使用的有些不同: 我们这样推导的 Plücker 公式远远不只研究来自映射 f 的局域性质的曲线 $f:S\to\mathbb{P}^n$ 的奇异性。但是我们已经看到, 平面曲线 $f:S\to\mathbb{P}^2$ 被来自 f 的整体性质的奇异性——比如结点——所控制, 但是它们远远不能反映在我们的一般公式中。为了得到相当大范围的应用, 我们将用*传统奇异性*来讨论 $\mathbb{P}^2$ 中的曲线, 现在我们给出定义。

定义: 我们称曲线 $f:S\to\mathbb{P}^2$ 有*传统奇异性*, 如果每个点 $p\in S$ 是下列之一:

1. *规则点*, 它是 f 和对偶曲线 f^* 的光滑点。在这样的点, $\beta_0(p)=\beta_1(p)=0$, 并且 f 有局域正规形式

$$f(z)=[1,z+\cdots,z^2+\cdots]。$$

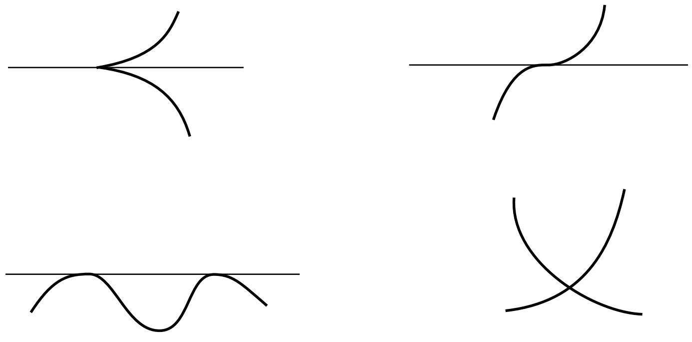


Figure 8

2. f 的普通拐点; 即, 有三阶切触切线的 f 的光滑点。在正规形式中,

$$\begin{aligned} f(z) &= [1, z+\cdots, z^3+\cdots], \\ f^*(z) &= [1, z^2+\cdots, z^3+\cdots]。\end{aligned}$$

3. f 的尖点, 即, 下列正规形式的 f 的奇异点:

$$f(z)=[1, z^2+\cdots, z^3+\cdots]。$$

因此, p 是 f 的拐点 $\Leftrightarrow$ p 是 f^* 的尖点。

4. f 的双切线, 即, 不是拐点且在某些点 $q \neq p$ 处也有简单切线的点。

5. f 的普通二重点, 即, f 的两个非奇异分支横截相交的点。显然, p 是 f 的双切线 $\Leftrightarrow$ p 是 f^* 的普通二重点。

注意一个要点: 如果 $f: S \to \mathbb{P}^2$ 是任意平面曲线, $f^*: S \to \mathbb{P}^{2*}$ 是它的对偶, 那么, 对点 $z_0 \in S$, 切线 $f^*(z_0) \in \mathbb{P}^{2*}$ 是当 $z \to z_0$ 时割线 $\overline{f(z_0)f(z)}$ 的极限位置。(见图9。) 类似地, $(f^*)^*(z_0)$——即 $\mathbb{P}^2$ 中对应于 $f^*(z_0)$ 处 $f^*(S) \subset \mathbb{P}^{2*}$ 的切线的点——是 $z \to z_0$ 时 z 和 z_0 处 $f(S)$ 的切线相交的极限位置, 当然是在 z_0 处了。于是我们得到, 对偶的对偶的原来的曲线。

现在, 假设 $f: S \to \mathbb{P}^2$ 有传统奇异性, 并且设 $C = f(S)$, $C^* = f^*(S)$。采用下列符号:

$g = S$ 的亏格,
$d = \deg C$, $d^* = \deg C^*$,
$b = C$ 的双切线数目, $b^* = C^*$ 的双切线数目,
$f = C$ 的拐点数目, $f^* = C^*$ 的拐点数目,
$\kappa = C$ 的尖点数目, $\kappa^* = C^*$ 的尖点数目,
$\delta = C$ 的二重点数目, $\delta^* = C^*$ 的二重点数目,

我们得到下列关系:

$$\begin{aligned} b &= \delta^*, \qquad & b^* &= \delta, \\ f &= \kappa^*, \qquad & f^* &= \kappa \end{aligned}$$

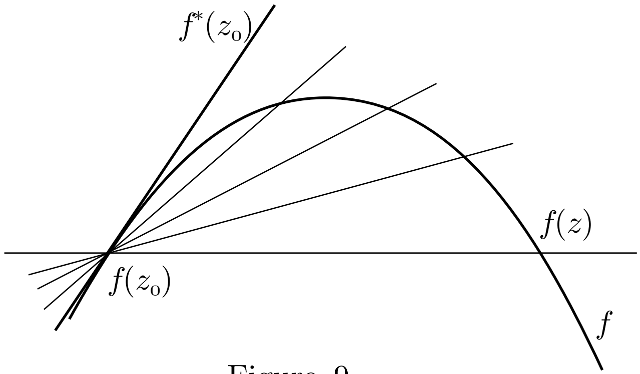


Figure 9

由定义, C 的对偶的次数——通常称为 C 的分类——是 C^* 与 $\mathbb{P}^{2*}$ 中一般直线相交点的数目, 即, 包含一般点 $p \in \mathbb{P}^2$ 的 C 的切线数目。设 p 是这样的点, 并且进一步假设 p 不处在 C 的任意奇异点处的 C 的切线上。选择 $\mathbb{P}^2$ 上的坐标 $[X_0, X_1, X_2]$ 使得 $p = [0, 0, 1]$; 如果 C 在这些坐标下作为多项式 $g(X_0, X_1, X_2) = 0$ 的轨迹而得到, 那么通过 p 的 C 的切线正好对应于 C 的光滑点, 使得 $(\partial g/\partial X_2)(q) = 0$。现在, 切线 $C' = (\partial g/\partial X_2 = 0)$ 的次数为 $d-1$, 并且通过 C 的二重点和尖点, 它们的多重数分别为 2 和 3。因此, C' 与 C 的光滑点的相交点数目为 $(C \cdot C') - 2\delta - 3\kappa$; 即,

$$(*) \qquad d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa。$$

类似地, 考虑从 p 到直线上 C 的投影映射 π。π 把 C 表示为 $\mathbb{P}^1$ 的 d 叶覆盖, 并且因此我们得到,

$$\chi(S) = 2 - 2g = 2d - b,$$

其中, b 是映射 $\pi \circ f : S \to \mathbb{P}^1$ 的分支点数目。现在, 就象在亏格的原始公式的讨论中一样, C 的光滑点 q 是 $\pi \circ f$ 的分支点, 当且仅当 $(\partial g/\partial X_2)(q) = 0$; 因此, 在 C 的光滑点中, 有 $d(d-1) - 2\delta - 3\kappa$ 个 $\pi \circ f$ 的分支点。另外, 我们还得到, 虽然对应于 C 的普通二重点的 S 的任意点都不是 $\pi \circ f$ 的分支点, 但是 C 的每个尖点是 S 的 1 阶分支点。因此,

$$\begin{aligned} b &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa - \kappa \\ &= d(d-1) - 2\delta - 2\kappa, \end{aligned}$$

并且因此,

$$2 - 2g = 2d - d(d-1) + 2\delta + 2\kappa$$

$$(**) \qquad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta - \kappa。$$

把关系 $(*)$ 和 $(**)$ 再应用到对偶曲线 C^*, 我们得到经典 *Plücker* 公式:

$$\begin{aligned} d^* &= d(d-1) - 2\delta - 3\kappa \qquad & g &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta - \kappa \\ d &= d^*(d^*-1) - 2b - 3f \qquad & g &= \frac{(d^*-1)(d^*-2)}{2} - b - f。 \end{aligned}$$

在后面, 当我们把 Riemann 曲面 S 的典范丛表示为平面中有传统奇异性的 d 次曲线 C 时, 要用到上面的公式。为此, 设 $f: S \to \mathbb{P}^2$ 和 $\pi: C \to \mathbb{P}^1$ 如上, 并且讨论亚纯 1 形式 $d(X_1/X_0)$ 的 S 的拖回 ω。首先, ω 在 C 与直线 $X_0 = 0$ 的交点上有二重极点; 因此,

$$(\omega)_\infty = f^*(2H)。$$

现在, 考虑由齐次多项式 $\partial g/\partial X_2$ (g 如上)给出的截面 $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^2((d-1)H))$。在 C 的奇异轨迹以外, 有

$$(\omega)_0 = (f^*\sigma);$$

另一方面, 在 C 的普通二重点 $p = f(q) = f(q')$, 虽然 $f^*\sigma$ 在 q 和 q' 都等于零, 但是 ω 不等于零; 在 C 的尖点 $p = f(q)$ 处, 虽然 $f^*\sigma$ 直到 3 阶都等于零, 但是 ω 将有一个简单零点。如果 $D \subset S$ 是 C 的奇异点的逆像(尖点的逆像计算两次). 于是,

$$(\omega)_0 = (f^*\sigma) - D,$$

并且最后得到

$$K_S = (\omega)_0 - (\omega)_\infty = f^*((d-3)H) - D。$$

现在我们转到某些特殊情形:

平面三次曲线: 设 C 是非奇异的平面三次曲线。那么 $d = 3, g = 1, K = \delta = 0$。还有, 因为没有与 C 相交四次的直线, 所以双切线的数目 b 等于零。类似地, 正规形式为

$$z \to [1, z + \cdots, z^{3+l} + \cdots] \quad (l \geqslant 0)$$

的任意一般拐点必然是普通拐点(即, $l = 0$)。所以奇异性是传统的, 并且经典 Plücker 公式给出了

$$d^* = 6, \quad f = 9。$$

九个拐点是不同的, 并且可以如下找到: 如果 $0 \in C$ 是一个拐点, 那么按照本章第二节的椭圆积分的反演的讨论, 我们可以用参数把 C 描述为

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2,$$

其中,

$$\begin{aligned} f(z) &= [1, \mathscr{P}(z), \mathscr{P}'(z)], \\ z &= \int_0^{f(z)} \omega, \end{aligned}$$

其中的 $\omega \in H^0(C, \Omega^1)$ 是生成元。由加法定理, 点 A, B, C 是与直线的三个交点这个情况正好是

$$\int_0^A \omega + \int_0^B \omega + \int_0^\Gamma \omega \equiv 0(\Lambda),$$

其中, $\Lambda = f^{-1}(0)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的格子。拐点是 $A = B = C$ 的那些直线; 即, 它们就是九个点

$$[1, \mathscr{P}(z), \mathscr{P}'(z)], \quad 其中 3z \in \Lambda。$$

由此我们得到来自经典几何的结果: *如果直线 L 经过非奇异平面三次曲线的两个拐点, 那么它也经过第三个拐点。*

注意, 如果 C 有一个通常的二重点, 那么 C 的拐点的数目降到三个, 而如果 C 有一个尖点, 那么它只有一个拐点。

平面四次曲线: 如果 C 是普通奇异的光滑平面四次曲线, 那么 C^* 的次数为

$$d^* = d(d-1) = 12。$$

于是我们得到,

$$2b + 3f = 12 \cdot 11 - 4 = 128。$$

另一方面, C 的亏格为 3, 并且由此

$$3 = \frac{11 \cdot 10}{2} - b - f,$$

即, $b + f = 52$。计算后我们得到,

$$\begin{aligned} f &= (2b+3f) - (2b+2f) \\ &= 128 - 2 \cdot 52 \\ &= 24 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} b &= (3b+3f) - (2b+3f) \\ &= 3 \cdot 52 - 128 \\ &= 28, \end{aligned}$$

即, C 有 24 个拐点和 28 条双切线。在第四章第四节我们将看到, 光滑平面四次曲线的 28 个双切线在另一种背景下重新出现。

一般地, 如果 C 是有传统奇异性的 d 次光滑平面曲线, 那么,

$$d^* = d(d-1)$$

和

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

因此,

$$2b + 3f = d(d-1) \cdot (d(d-1) - 1) - d$$

和

$$b+f=\frac{(d(d-1)-1)(d(d-1)-2)}{2}-\frac{(d-1)(d-2)}{2}。$$

因此,

$$\begin{aligned} f &= (2b+3f)-(2b+2f) \\ &= 3d(d-2) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} b &= (3b+3f)-(2b+3f) \\ &= \frac{1}{2}d(d+1)(d-1)(d-2)-4d(d-2)。 \end{aligned}$$

5. 对应

定义和公式

两条曲线 C 和 C' 之间的对应 $T: C \to C'$ 把每个点 $p \in C$ 与 C' 上次数为 d 的除子 $T(p)$ 对应起来, 其中 $T(p)$ 随着 p 全纯地变化。它可以定义为从 C 到 C' 的第 d 次对称积的一个全纯映射

$$C \to C'^{(d)},$$

或者等价地——且更常用地——定义为它的对应曲线(直观地定义为它的图形)

$$D=\{(p,q): q \in T(p)\} \subset C \times C';$$

反过来, 给定任意曲线 $D \subset C \times C'$, 我们可以把伴随的对应定义为

$$T(p)=i_p^*(D) \subset \mathrm{Div}(C'),$$

其中, $i_p: C' \to C \times C'$ 把 q 变成 (p,q)。如果曲线对应是不可约的, 那么这个对应就称为不可约的。

对应曲线为 $D \subset C \times C'$ 的对应 $T: C \to C'$ 的逆定义为曲线

$$D'=\{(q,p): (p,q) \in D\} \subset C' \times C$$

即,

$$T^{-1}(q)=\sum_{q \in T(p)} p$$

给出的对应。

一些基本的对应如下:

1. 如果 $\{D_\lambda\}$ 是曲线 C 上无基点的束, 或者等价地是一个分支覆盖映射 $C \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$, 那么, 对每个 $p \in C$, 存在唯一包含 p 的除子 $D(p) \in \{D_\lambda\}$; 我们可以把对应 T 定义为

$$T(p) = D(p) - p,$$

即, T 由曲线

$$D = \{(p, q) : D_\lambda - p - q \geqslant 0, \text{对某些}\lambda\} \subset C \times C$$

给出。注意, T 是对称的, 即 $T = T^{-1}$。

2. 如果 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是光滑平面曲线, 那么, 我们把对应 $T : C \to C$ 定义为

$$T(p) = T_p(C) \cdot C - 2p,$$

即, T 由轨迹

$$\{(p, q) : p \neq q, q \in T_p(C)\}$$

的 $C \times C$ 中的闭集 D 给出。注意, 只有当 $T_p(C)$ 与 C 在 p 处相交多重数为 3 或更多时, 即, 只有 P 是 C 的拐点时, $p \in T(p)$。T 称为 C 上的**切对应**。

我们关心的伴随于对应的现象有:

1. 对应 $T : C \to C'$ 的**重合点**是一个配对 $(p, q) \in C \times C'$, 使得 q 在 $T(p)$ 中的多重数为 2 或更多; 如果 q 在 $T(p)$ 中出现的多重数为 $(m + 1)$, 那么我们称 (p, q) 是 T 的 m 重重合点。在上面的第一个例子中, 如果 q 是由束 $\{D_\lambda\}$ 和 $p \neq q \in \pi^{-1}(\pi(q))$ 给出的映射 $C \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ 的分支点, 那么, 配对 (p, q) 将是 T 的重合点; 在第二个例子中, 重合点对应于 C 的双切线。

一般地, 如果 $T : C \to C'$ 是由曲线 $D \subset C \times C'$ 给出的对应, 那么, 重合点或者是 D 在第一个因子上的投影

$$\pi_1 : D \to C$$

的分支点, 或者是 D 的奇异点。

2. 从曲线到它自己的对应 $T : C \to C$ 的**结合点**是 $p \in T(p)$ 的点 $p \in C$; 如果 p 在 $T(p)$ 中出现的多重数为 m, 那么我们称 p 是 T 的多重数为 m 的结合点。在上面的例 1 中, T 的结合点 p 是由 $\{D_\lambda\}$ 给出的映射 $C \to \mathbb{P}^1$ 的分支点; 在例 2 中它们是 C 的拐点。一般地, 如果 $T : C \to C$ 由曲线 $D \subset C \times C$ 给出, 那么, 结合点是 D 与对角曲线 $\Delta \subset C \times C$ 的交点。

3. 两个对应 $T, S : C \to C'$ 的公共点——正如名称一样——是 q 既在 $T(p)$ 中又在 $S(p)$ 中的配对 $(p, q) \in C \times C'$。如果 T 和 S 由 $C \times C'$ 中的曲线 D 给出, 那么公共点就是 D 和 F 的交点。

4. 从亏格为 $g \geqslant 1$ 的曲线到它自己的对应 $T : C \to C$ 称为价为 k, 如果除子

$$T(p) + k \cdot p$$

的线性等价类独立于 p。上面例 1 和例 2 的对应的价分别为 1 和 2。一般地, 对应不需要有任何价; 如果它的确有一个价, 那么, 价是唯一的: 如果对 $k > k'$, $T(p) + k \cdot p$ 和

$T(p)+k'\cdot p$ 的线性等价类都是常数, 那么将得到, 除子 $(k-k')\cdot p$ 都属于某些线性系 E, 且维数为 r。因为曲线 $\iota_E(C)\subset\mathbb{P}^r$ 的一般点与任意超平面相交的多重数至多为 r, 那么得到, $r=k-k'$——但是因此 $\iota_E(C)$ 是有理正规曲线, 与 $g(C)\geqslant 1$ 的假设相反。

实际上, 最容易使用的对应 $T:C\to C$ 的性质是 T 的次数——即, 对应 $D\subset C\times C$ 的曲线与垂直纤维 $E_p=\pi_1^{-1}(p)\subset C\times C$ 的相交数 $^{\#}(D\cdot E)$; T^{-1} 的次数—— D 与水平纤维 $F_p=\pi_2^{-1}(p)\subset C\times C$ 的相交数; 和 T 的价(如果它有价的话)。另一方面, 就象我们将看到的一样, 为了计算 T 的重合点或结合点的个数, 我们要知道曲线 $D\subset C\times C$ 的同调类。这一般是不可能的: $C\times C$ 上的除子模同调的群

$$H^{1,1}(C\times C)\cap H^2(C\times C,\mathbb{Z})$$

有非常难预测的秩。要想用某些对应对同调类进行有效计算的是基本

引理: 设 $T:C\to C$ 是一个对应, $D\subset C\times C$ 是它的对应曲线。那么, T 有价当且仅当 D 同调于 $C\times C$ 的纤维 E,F 和对角曲线 $\Delta\subset C\times C$ 的线性组合

$$D\sim aE+bF-k\Delta。$$

证明: 首先, 假设 $D\sim aE+bF-k\Delta$。我们首先主张, D 线性等价于求和

$$G=\sum a_iE_{p_i}+\sum b_iF_{q_i}-k\Delta,$$

其中, $E_p=\pi_1^{-1}(p),F_q=\pi_2^{-1}(q)$。它从 Küunneth 公式得到: 因为交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(C\times C,\mathbb{Z}) & \to & H^1(C\times C,\mathscr{O}) & \to & \mathrm{Pic}^0(C\times C) & \to 0\\
\uparrow {\scriptstyle \pi_1^*\times\pi_2^*} & & \uparrow {\scriptstyle \pi_1^*\times\pi_2^*} & & \uparrow {\scriptstyle \pi_1^*\times\pi_2^*} & \\
H^1(C,\mathbb{Z})\oplus H^1(C,\mathbb{Z}) & \to & H^1(C,\mathscr{O})\oplus H^1(C,\mathscr{O}) & \to & \mathrm{Pic}^0(C)\times\mathrm{Pic}^0(C) & \to 0
\end{array}$$

的前两个垂直映射是同构, 所以后一个也是同构。现在, 如果 $D\subset C\times C$ 线性等价于上面写出的除子 G, 那么对一般的 $p\in C$, 除子 $T(p)=i_p^*(D)$ 线性等价于除子 $i_p^*(G)=\sum b_iq_i-k\cdot p$; 显然, 因此 $T(p)+k(p)$ 的线性等价类独立于 p。反过来, 假设对应 T 的价为 k。写出

$$T(p)+k\cdot p=\sum b_iq_i;$$

和

$$T^{-1}(q_0)+k\cdot q_0=\sum a_ip_i,$$

并且设 L 是线从

$$L=D-\sum a_iE_{p_i}-\sum b_iF_{q_i}+k\Delta。$$

于是, 由假设得到, L 到任意 π_1 的纤维 E_p 的限制是平庸的, 同样, 到 π_2 的纤维 F_{q_0} 的限制也是平庸的。我们现在主张, 在这些情况下 L 必然是平庸的; 这当然就充分证明了引理。

为此, 设 s_0 是 L 到 F_{q_0} 的限制的整体非零全纯截面。那么, 对每个 $p \in C$, 将存在一个 $L|_{E_p}$ 的唯一整体截面 $t(p)$, 使得 $t(p)(p,q) = s_0(p,q_0)$; 设

$$t(p,q) = t(p)(q)。$$

于是 t 是 L 的整体非零全纯截面, 并且因此 L 是平庸的。 证毕

注意, 乍看起来好像价的概念不大可能存在的, 并且有价的对应将相对稀少。实际上正好相反: *在一般 Riemann 曲面上, 没有无价的对应。*(这里的"一般"的意思与通常的稍有不同, 马上就可以看到。) 我们不证明它, 但是读者可以搞清楚为什么这样: 由 Künneth 公式得到,

$$\begin{aligned} H^{1,1}(C \times C) &= (H^{1,1}(C) \otimes H^{0,0}(C)) \oplus (H^{1,0}(C) \otimes H^{0,1}(C)) \\ &\quad \oplus (H^{0,1}(C) \otimes H^{1,0}(C)) \oplus (H^{0,0}(C) \otimes H^{1,1}(C))。\end{aligned}$$

表达式中的第一和最后一项都是一维的, 并且分别由纤维 E 和 $F \subset C \times C$ 的类生成。写出 $(H^{1,0}(C) \otimes H^{0,1}(C)) \oplus (H^{0,1}(C) \oplus H^{1,0}(C))$ 的一个基, 读者将看到, 在不是对角曲线的中间因子中存在一个整类就要求 C 的周期矩阵满足一定的有理性条件(参见第三章第四节的类似计算); 因此, 存在无价对应的亏格为 g 的曲线集合应该是所有亏格为 g 的曲线族的真子簇的可数并集。

例如, 读者可以验证, 亏格为 1 的曲线存在无价的对应, 当且仅当它有*复因子*, 即, 写作

$$C = \frac{\mathbb{C}}{\Lambda},$$

其中 Λ 是由 1 和 τ 生成的格子, 当且仅当 τ 满足 $\mathbb{Q}$ 上的二次多项式。

现在, 用我们的基本引理来推导对应的的三个基本公式。要做的第一件事是确定由 E, F 和 Δ 的类张开的 $H_2(C \times C, \mathbb{Z})$ 的子空间上的相交配对。显然, 我们得到,

$$\begin{aligned} {}^\#(E \cdot F) &= 1, \\ {}^\#(E \cdot E) &= {}^\#(F \cdot F) = 0, \end{aligned}$$

和

$${}^\#(\Delta \cdot E) = {}^\#(\Delta \cdot F) = 1;$$

未确定的只有 $\Delta \cdot \Delta$。为此, 设 $\{D_\lambda\}$ 是 C 上的 d 次曲线束, 并且设 T 是象上面例 1 中由 $\{D_\lambda\}$ 定义的对应; 设 $D \subset C \times C$ 是它的对应曲线。因为 T 的价为 1, 所以我们可以写出,

$$D \sim aE + bF - \Delta。$$

还有, 因为 T 和 T^{-1} 的次数都是 $d-1$, 所以我们得到,

$$d - 1 = {}^\#(D \cdot E) = b - 1$$

和

$$d-1={}^{\#}(D\cdot F)=a-1,$$

即,

$$D\sim dE+df-\Delta。$$

现在, T 的结合点的数目 ${}^{\#}(D\cdot\Delta)$ 就是由 $\{D_\lambda\}$ 给出的映射 $C\to\mathbb{P}^1$ 的分支点的数目; 这是 d 叶覆盖, 由 Riemann–Hurwitz 公式得到,

$$2g-2=-2d+b,$$

即,

$$D\sim dE+dF-\Delta。$$

因此,

$$\begin{aligned}2g-2+2d &= {}^{\#}(D\cdot\Delta)\\ &= d^{\#}(E\cdot\Delta)+d^{\#}(F\cdot\Delta)-{}^{\#}(\Delta\cdot\Delta),\\ &= 2d-{}^{\#}(\Delta\cdot\Delta),\end{aligned}$$

并且因此得到,

$$\Delta\cdot\Delta=2-2g。$$

从而相交配对为

#	E	F	Δ
E	0	1	1
F	1	0	1
Δ	1	1	$2-2g$

现在, 假设 T 是任意对应, 且 $\deg(T)=d,\deg(T^{-1})=d'$, 以及价为 k。如果 D 是 T 的对应的曲线, 那么我们写出

$$D\sim aE+bF-k\Delta。$$

于是, 因为

$$d=\deg T={}^{\#}(D\cdot E)=b-k,$$

和

$$d'=\deg T^{-1}={}^{\#}(D\cdot F)=a-k,$$

所以我们得到,

$$D\sim(d'+k)E+(d+k)F-k\Delta。$$

因此,

$$\begin{aligned}D\cdot\Delta &= d'+k+d+k-k(2-2g)\\ &= d+d'+2kg,\end{aligned}$$

即,

$$(*) \qquad T\text{有}\,d+d'+2kg\text{个结合点},$$

这被称为 *Cayley–Brill* 公式。

类似地, 如果 S 是由曲线 $G\subset C\times C$ 给出的另一个对应, 其中 $\deg(S)=e, \deg(S^{-1})=e'$ 以及价为 l,

$$G\sim(e'+l)E+(e+l)F-\Delta。$$

利用相交表进行计算后得到,

$$^{\#}(D\cdot G)=ed'+e'd-2gkl,$$

即,

$$(**) \qquad \text{对应 } T \text{ 和 } S \text{ 有 } ed'+e'd-2gkl \text{ 个公共点。}$$

对应 $T:C\to C$ 的重合点个数的计算略微难一些。设 T 和 D 如上,

$$D\sim(d'+k)E+(d+k)F-k\cdot\Delta。$$

如果 D 是光滑的和不可约的, 那么我们可以利用 D 的典范丛的伴随公式

$$K_D=(K_{C\times C}+D)|_D$$

来得到

$$\deg K_D={}^{\#}(K_{C\times C}\cdot D)+{}^{\#}(D\cdot D)。$$

一旦我们计算出这些相交数, 我们就可以得到结果了; 由 Hurwitz 公式, 投影 $\pi_1:D\to C$ 在第一个因子上的分支点个数 b 为

$$\deg K_D=d\cdot\deg K_C+b,$$

即,

$$\begin{aligned} b &= \deg K_D-d\cdot\deg K_C \\ &= {}^{\#}(K_{C\times C}\cdot D)+{}^{\#}(D\cdot D)-d(2g-2)。\end{aligned}$$

现在, 如果 ω,ω' 是 C 上的全纯 1 形式, 那么 $C\times C$ 上 2 形式 $\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\omega'$ 的除子为

$$(\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\omega')=\pi_1^*(\omega)+\pi_2^*(\omega')。$$

因此, $K_{C\times C}$ 的同调类为

$$\begin{aligned} K_{C\times C} &\sim \pi_1^*K_C+\pi_2^*K_C \\ &= (2g-2)E+(2g-2)F。\end{aligned}$$

于是我们得到,

$$\begin{aligned}{}^{\#}(D\cdot K_{C\times C}) &= (2g-2)(d+k)-k(2g-2)+(2g-2)(d'+k)-k(2g-2)\\ &= (2g-2)(d+d'),\end{aligned}$$

并且通过另外的直接运算得到,

$${}^{\#}(D\cdot D)=2dd'-2gk^2。$$

总结一下得到,

$$\begin{aligned}b &= {}^{\#}(K_{C\times C}\cdot D)+{}^{\#}(D\cdot D)-d(2g-2)\\ &= (d+d')(2g-2)+2dd'-2gk^2-d(2g-2)\\ &= 2dd'+(2g-2)d'-2gk^2,\end{aligned}$$

即,

$(***)$ 对应 T 有 $2dd'+(2g-2)d'-2gk^2$ 个重合点。

这个计算容易推广到对应 T 由光滑不可约曲线 $D_i\subset C\times C$ 求和所给出的情况——那时, T 的重合点由曲线 D_i 定义的对应 T_i 的重合点, 加上 $i\neq j$ 的对应 D_i 和 D_j 的公共点(就象我们将看到的那样, 计数时多重数为 2)组成, 并且容易验证公式成立。一个相当严重的缺点是, 所陈述的公式只对光滑曲线 D 成立。因为不总是这种情况, 所以我们借用第四章第二节的几个结果来至少看看怎样处理 D 有普通二重点的情况。

假设 $d\subset C\times C$ 有 δ 个普通二重点 (p_i,q_i), 并且在其它处是光滑的。假设 D 在这样的二重点 (p,q) 处的两个分支都不与纤维 $E_p=\pi_1^{-1}(p)$ 相切, 那么, (p,q) 将作为 T 的一个简单重合点而出现。从第四章第二节我们看到, D 是光滑曲线 $\tilde{D}$ 经过映射 $\tilde{\pi}:\tilde{D}\to D\subset C\times C$ 的像, 这个映射在 D 的二重点之外是一对一和光滑的——在二重点周围我们直接把 D 的两个分支分开。还有, Riemann 曲面 $\tilde{D}$ 的亏格为(参见第280页)

$$g(\tilde{D})=\frac{{}^{\#}(K_{C\times C}\cdot D)+{}^{\#}(D\cdot D)}{2}+1-\delta,$$

即,

$$\deg K_{\tilde{D}}={}^{\#}(K_{C\times C}\cdot D)+{}^{\#}(D\cdot D)-2\delta。$$

因此, 复合映射 $\pi_1\cdot\tilde{\pi}:\tilde{D}\to C$ 将有

$$\begin{aligned}b &= \deg K_{\tilde{D}}-d\cdot\deg K_C\\ &= 2dd'+(2g-2)d'-2gk^2-2\delta\end{aligned}$$

个分支点; 即, 除了 D 的二重点 (p_i,q_i), 对应 T 将有

$$2dd'+(2g-2)d'-2gk^2-2\delta$$

个重合点。于是我们得到, 如果我们把来自 D 的二重点的重合点的多重数记为 2, 那么上面给出的 T 的重合点的数目公式成立。

实际上, 容易把 T 的普通重合点从对应于 D 的二重点的重合点区分出来: 光滑点 $(p,q)\in D$ 只是投影 $\pi_1: D\to C$ 和 $\pi_2: D\to C$ 之一的分支点, 而二重点 $(p,q)\in D$ 将作为 T 和 T^{-1} 的重合点而出现。

把我们的公式应用到 d 次光滑平面曲线上例 2 的对应。就象我们已经看到的一样, T 的次数为 $d-2$, 价为 2; T^{-1} 的次数为除了经过点 $q\in C$ 的 $T_q(C)$ 的切线的数目, 即, 从 q 到直线上的 C 的投影 π_q 的分支点数目 b。这个投影是 $(d-1)$ 叶的, 并且因此由 Riemann–Hurwitz 公式得到,

$$\begin{aligned}\deg T^{-1} &= b = 2g-2+2(d-1)\\ &= (d-1)(d-2)-2+2(d-1)\\ &= (d+1)(d-2)。\end{aligned}$$

由公式 $(*)$, T 的结合点的数目——即 C 的拐点数目——为

$$\begin{aligned}f &= (d-2)+(d+1)(d-2)+2kg\\ &= (d-2)+(d+1)(d-2)+2(d-1)(d-2)\\ &= 3d(d-2),\end{aligned}$$

它与我们在 Plücker 公式的最后一个小节中的计算一致。为了计算 C 的双切线数目, 我们必须小心: 如果 q 和 p 是 C 的不同点, 满足 $T_p(C)=T_q(C)$, 那么, (p,q) 和 (q,p) 都是 T 的重合点。 C 的双切线的数目 b 因此是 T 的重合点的数目的一半; 由 $(***)$ 得到,

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{2}[2(d-2)(d-2)(d+1)+(2g-2)(d-2)(d+1)-2gk^2]\\ &= \frac{1}{2}d(d+1)(d-1)(d-2)-4d(d-2),\end{aligned}$$

正如我们以前得到的一样。

空间曲线的几何

现在, 我们通过在空间曲线——即 $\mathbb{P}^3$ 中的曲线——的几何应用来说明对应方法。我们的基本目的是找到亏格为 g 的 d 次空间曲线的四次割线的的数目; 用这种方法, 我们将得到几个不变量。

在开始前, 我们想做个观察。 $\mathbb{P}^3$ 中与曲线 C 相交的直线族的在 Grassmann 流形中的余维数为 1。那么, 由简单的维数计算, 我们可以预期, C 有有限条四次割线但没有与 C 相交五次的直线。类似地, 我们预期将有有限个 C 的点, 它的切线与 C 的给定切线相交, 因此有有限条三次割线 $\overline{p,q,r}$, 使得 $T_p(C)$ 和 $T_q(C)$ 相交, 但是没有这样的四次割线。一般地, 如果没有维数计算所不能预言的现象出现, 我们称曲线有非退化的性质。在下面的讨论中我们将假设, 正是这种情况; 特别是, 我们将假设

1. C 没有五次割线就
2. C 的每条四次割线的四个交点的切线是不相交的。
3. 没有与 C 的切触阶次为 3 的直线, 即, C 的第一伴随曲线是光滑的。
4. 没有包含 C 的另一条切线的 C 的切触 2 维平面。

现在, 我们讨论的中心目标是 C 上的三次割线对应 T, 它定义为曲线

$$D = \{(p, q) : \overline{pq}\text{是 } C \text{ 的三次割线}\}。$$

我们首先计算 T 的次数: 如果 p 是 C 的一般点, 那么在从 p 的 C 的投影下 C 的像将是只有普通二重点的 $d-1$ 次平面曲线, 并且这个曲线的二重点对应于经过 p 的 C 的三次割线。由 Plücker 公式, 经过 p 的三次割线的数目为

$$\delta = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - g,$$

并且, 因为对经过 p 的 C 的三次割线, $T(p)$ 将包含两个点, 所以

$$\deg T = (d-2)(d-3) - 2g。$$

(注意, 由我们关于空间曲线亏格的上界(第252页), 除了 $d = 3, g = 0$ 或 $d = 4, g = 1$ 外, 这个数是正的。) 因为 T 是对称的, 所以这也是 T^{-1} 的次数。

现在, T 有价, 正如我们从下面看到的一样: 如果 $\pi_p : C \to \mathbb{P}^2$ 是如上从一个一般点 $p \in C$ 的 C 的投影, 那么, 就象我们在前一节证明的一样, 因为 $\deg \pi_p C = d-1$, 所以

$$K_C = \pi_p^*((d-4)H_{\mathbb{P}^2}) - D,$$

其中 D 是 $\pi_p(C)$ 的二重点在 C 中的像。但是现在, 在 C 上我们有

$$\pi_p^*(H_{\mathbb{P}^2}) = H_{\mathbb{P}^3} - p$$

和当然有

$$D = T(p),$$

所以,

$$K_C = (d-4)H_{\mathbb{P}^3} - (d-4)p - T(p),$$

即,

$$T(p) + (d-4)p = (d-4)H_{\mathbb{P}^3} - K_C$$

作为一个线性等价类是常数, 并且因此 T 的价为 $k = (d-4)$。

现在, 考虑对应 T 的重合点。对 $p \in C$, 如果它不能包含 $(d-2)(d-3) - 2g$ 个不同点, 那么 $T(p)$ 将包含一个多重点。当投影曲线有除了普通二重点外的奇异性时, 正好是这种情况; 这可以用下面三种方法中出现:

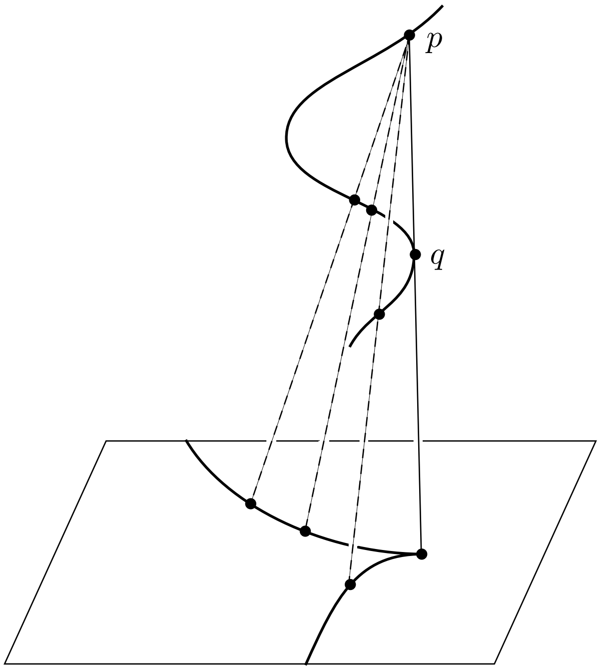


Figure 10

1. 如果经过 p 的直线与 C 简单相切与另一点 q, 那么, q 在 $\pi_p(C) \subset \mathbb{P}^2$ 中的像是 $T_p(C)$ 的一个尖点。(见图10。) 由 Plücker 公式, 在没有其它特殊性质时, $\pi_p(C)$ 在 $\pi_p(q)$ 以外将有 $\delta = (d-2)(d-3)/2 - g - 1$ 个二重点, 并且因此 $T(p)$ 除 q 之外还包含 $(d-2)(d-3) - 2g - 2$ 个点; 因此 q 在 $T(p)$ 中的多重数取为 2。

注意, (p, q) 不是 T^{-1} 的重合点, 因此 (p, q) 是对应 D 的曲线的一个单点。

与 C 相切且再次与 C 在其它处相交的直线称为 C 的**切三次割线**。我们看到对每个 C 的切三次割线将有 T 的一个重合点。

2. 如果经过 p 的直线与 C 相交于两个其它点 q 和 q', 并且 C 在 q 和 q' 的切线相交, 那么, 像点 $\pi_p(q) = \pi_p(q') \in \pi_p(C)$ 将是 $\pi_p(C)$ 的二重点, 但不是普通二重点: 在 $\pi_p(q)$ 处 $\pi_p(C)$ 的两个分支的切线将重合。(见图11。) 这样的二重点称为**自切点**。现在, 就象我们将在第四章第二节将看到的一样, 一个自切点把曲线的亏格减小 2, 因此, 如果 $\pi_p(C)$ 有一个自切点, 那么它只有 $(d-2)(d-3)/2 - g - 2$ 个其它二重点。因此, $T(p)$ 包含不是 q 和 q' 的 $(d-2)(d-3) - 2g - 4$ 个点, 并且因此每个配对 (p, q) 和 (p, q') 将是 T 的一个重合点。再次, 因为 (p, q) 和 (p, q') 都不是 T^{-1} 的重合点, 所以它们都是 D 的光滑点。

满足 $T_q(C)$ 和 $T_{q'}(C)$ 相交的三次割线 $\overline{p, q, q'}$ 称为 C 的**稳定三次割线**; 由上面可知, 对每个 C 的稳定三次割线存在 T 的两个重合点。

3. 如果经过 p 的直线与 C 相交于三个其它点, 那么像点 $\pi_p(q_1) = \pi_p(q_2) = \pi_p(q_3)$ 将是 $\pi_p(C)$ 的普通三重点。(见图12。) 再次从后面的第四章第二节得到, 一个三重点把曲线的亏格减小 3, 使得 $T(p)$ 只包含不是 q_1, q_2, q_3 的 $(d-2)(d-3) - 2g - 6$ 个重合点; 因此每个配对 $(p, q_1), (p, q_2)$ 和 (p, q_3) 将是 T 的一个重合点。还有, 由同样的讨论, (p, q_i) 将是 T^{-1}

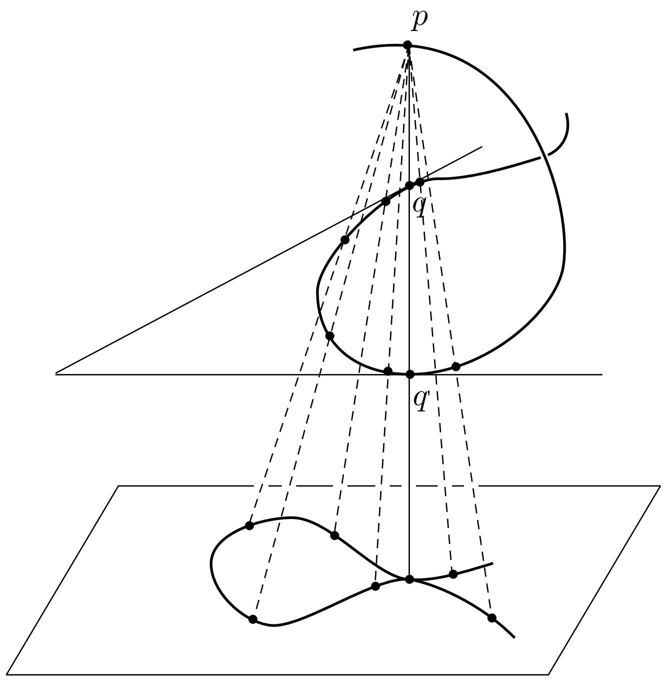


Figure 11

的一个重合点, 所以 (p, q_i) 实际上是 D 的一个二重点。因此, 如果 $L = \overline{p_1p_2p_3p_4}$ 是 C 的四次割线, 那么, 12 个配对 (p_i, p_j) 的每个都是 D 的二重点, 并且因此对 C 的每个四次割线存在 T 的 24 个重合点。

现在, 知道了 T 的次数和价, 我们可以计算 T 的重合点的总数, 因此, 为了找到 C 的四次割线的数目 Q, 我们必须找到切三次割线和稳定三次割线的数目。切三次割线的数目容易得到, 因为显然, $q \in T_p(C)$ 的三次割线 $\overline{p,q}$ 正好对应于 T 的结合点 (p, p)。由公式 $(*)$ 得到:

$$\begin{aligned} t &= (d-2)(d-3) - 2g + (d-2)(d-3) - 2g + 2(d-4)g \\ &= 2(d-2)(d-3) + 2(d-6)g。\end{aligned}$$

稳定三次割线的数目 s 有点难算出。为此, 我们引入 C 上的*双切对应* S, 它定义为曲线

$$G = \overline{\{(p,q) : p \neq q, T_p(C) \cap T_q(C) \neq \emptyset\}} \subset C \times C。$$

对每个 $p \in C$, 除子 $S(p)$ 是 p 处 C 的切线 $L = T_p(C)$ 到直线上的 C 的投影映射 π_L 的分支轨迹; 因为 π_L 的次数为 $d-2$, 所以, 由 Riemann–hurwitz 公式得到

$$\begin{aligned} \deg S &= 2g - 2 + 2(d-2) \\ &= 2g + 2d - 6。\end{aligned}$$

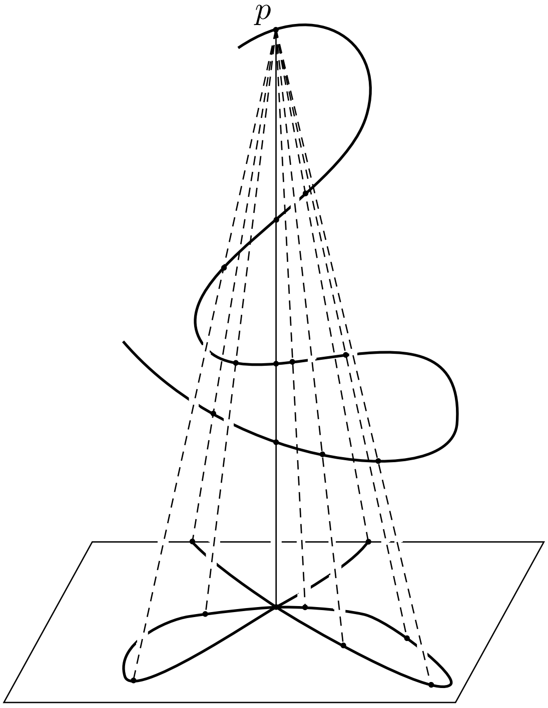


Figure 12

因为 S 是对称的, 所以它也是 S^{-1} 的次数。我们还得到,

$$K_C = \pi_L^*(-2H_{\mathbb{P}^1}) + S(p),$$

并且因为 $\pi_L^*(H_{\mathbb{P}^1}) = H_{\mathbb{P}^3} - 2p$, 所以这得到了

$$S(p) + 4p = K_C + 2H_{\mathbb{P}^3},$$

即, S 的价为 4。

现在, 考虑两个对应 T 和 S 的公共点。(见图13。) 它们可以在两种情况下出现: 如果 $\overline{p,q,q'}$ 是 C 的稳定三次割线, 且 $T_q(C) \cap T_{q'}(C) \neq \emptyset$, 那么, (q,q') 和 (q',q) 的每一对将是 S 和 T 的一个公共点。另外, 如果 $\overline{p,q}$ 是 $q \in T_p(C)$ 的切三次割线, 那么, (p,q) 和 (q,p) 都是 S 和 T 的公共点。从而 S 和 T 的公共点的数目为 $2s+2t$; 由公式 $(**)$ 得到

$$2s + 2t = 2((d-2)(d-3) - 2g)(2g + 2d - 6) - 2g(d-4) \cdot 4,$$

即,

$$\begin{aligned} s &= ((d-2)(d-3) - 2g)(2g + 2d - 6) - 4g(d-4) \\ &\quad -2(d-2)(d-3) - 2(d-6)g \\ &= 2(d(d-2)(d-3) - 2(d-2)(d-3) - 6(d-2)(d-3) \\ &\quad +2g((d-2)(d-3) - 2g - 2d + 6 - 2(d-4) - (d-6)) \\ &= 2(d-2)(d-3)(d-4) + 2g(d^2 - 10d + 26 - 2g)。\end{aligned}$$

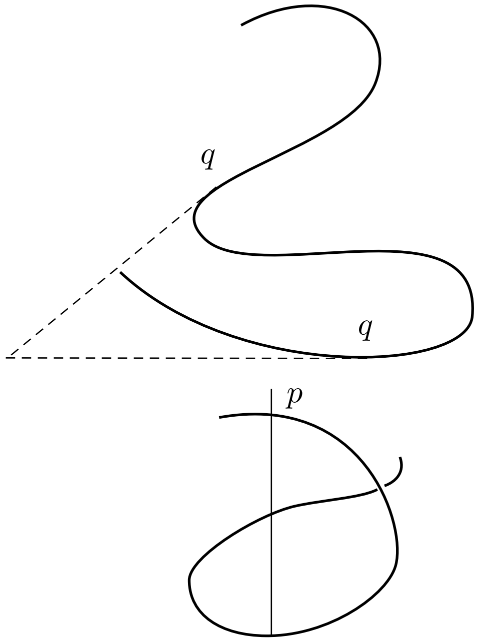


Figure 13

我们现在可以计算 C 的四次割线的数目 Q 了。就象我们已经看到的那样, 对应 T 的重合点的总数为 $t+2s+24Q$; 由公式 $(***)$ 得到,

$$\begin{aligned} t+2s+24Q &= 2((d-2)(d-3)-2g)^2 \\ &\quad +2g-2((d-2)(d-3)-2g)-2g(d-4)^2, \end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{12}((d-2)(d-3)-2g)^2+(g-1)((d-2)(d-3) \\ &\quad -2g-g(d-4)^2-(d-2)(d-3)-(d-6)g \\ &\quad -2(d-2)(d-3)(d-4)-2g(d^2-10d+26-2g)。 \end{aligned}$$

计算得到

$$Q=\frac{1}{12}(d-2)(d-3)^2(d-4)-\frac{1}{2}g(d^2-7d+13-g)。$$

一个要点: 当把这个讨论推导出的公式先验地应用到不退化的曲线时, 怎样考虑这些性质从推导上是显然的。例如, 如果 $L=\overline{p_1,\cdots,p_5}$ 是 C 的五次割线, 我们可以验证, 20 个配对 (p_i,p_j) 的每一个是曲线 D 的三重点, 并且因此把 D 的亏格减小 3; 回到 $(***)$ 的推导我们看到, 每个配对 (p_i,p_j) 考虑为六个重合点。因此 L 给出 T 的 120 个重合点, 即, 在最后的公式中, C 的每条五次割线等价于 $120/24=5$ 条四次割线。

最后, 我们在这里借机讨论一些枚举问题, 必须考虑的 $\mathbb{P}^3$ 中多于一条曲线的外在性质的枚举问题可以用 Schubert 运算的方法来解决。例如, 如果 C 和 C' 是空间曲线, 那么我们可以求 C 和 C' 的公共弦的数目。为此, 设 $V(C) \subset G(2,4)$ 为 C 的弦的代数曲面, 它在 $\mathbb{P}^3$ 中直线的 Grassmann 流形中。 $G(2,4)$ 的第四同调群由闭链

$$\sigma_2(p) = \{l \in \mathbb{P}^3 : p \in l\}$$

和

$$\sigma_{1,1}(H) = \{l \subset \mathbb{P}^3 : l \subset H\}$$

生成; 显然我们得到,

$$^{\#}(\sigma_2 \cdot \sigma_2) = {}^{\#}(\sigma_{1,1} \cdot \sigma_{1,1}) = 1; \quad {}^{\#}(\sigma_2 \cdot \sigma_{1,1}) = 0。$$

如果我们写出

$$V(C) \sim a \cdot \sigma_{1,1} + b \cdot \sigma_2,$$

那么,

$$a = {}^{\#}(V(C) \cdot \sigma_{1,1}), \quad b = {}^{\#}(V(C) \cdot \sigma_2)。$$

这些数都容易计算。一般超平面 H 与 C 相交于 d 个不同点 $\{p_i\}$, 并且因此正好包含 $d(d-1)/2$ 个弦 $\{\overline{p_i p_j}\}_{i \neq j}$; 因此,

$$a = \frac{d(d-1)}{2}。$$

另一方面, 对 $\mathbb{P}^3$ 的一般点, 经过 p 的 C 的弦的数目就是在从 p 到超平面的投影下 C 的像的二重点的数目; 由 Plücker 公式, 它是

$$b = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g。$$

结合起来得到,

$$V(C) \sim \frac{d(d-1)}{2} \cdot \sigma_{1,1} + \left(\frac{(d-1)(d-2)}{2} - g\right) \sigma_2。$$

如果 C' 的次数为 d' 亏格为 g', 并且如果 C 和 C' 互相关于对方处于一般位置, 使得 $V(C)$ 和 $V(C')$ 横截相交, 那么 C 和 C' 将得到

$$\begin{aligned} {}^{\#}(V(C) \cdot V(C')) \quad = \quad & \frac{d(d-1) \cdot d'(d'-1)}{4} + \frac{(d-1)(d-2)(d'-1)(d'-2)}{4} \\ & -(d-1)(d-2)g' - (d'-1)(d'-2)g + gg' \end{aligned}$$

个公共弦。

特殊线性系 III

就象前面所承诺的那样, 我们将利用关于对应的结果来解答来自 Brill–Noether 问题的某些枚举问题。我们已经知道, 亏格 $g = 2k$ 的一般 Riemann 曲面有有限个 $k+1$ 次束; 问

题是, 有多少? 我们将在亏格 $g=4,6,8$ 时来解答这个问题。(注意, $g=2$ 时的答案 1 已经得到了。)

$g=4$: 如果 S 是亏格为 4 的 Riemann 曲面, 那么它的典范曲线是 $\mathbb{P}^3$ 中的 6 次曲线。现在, 如果 $D=\sum p_i$ 是 S 上 3 次除子, 那么由 Riemann–Roch 公式的几何描述, 当点 p_i 共线时, $l(D)$ 正好是 1; 对每个 3 次束, 将存在一个经过一般点 $p\in S$ 的这样的除子。因此这样的束的数目为经过一般点 $p\in S$ 的 S 的三次割线的数目——并且我们已经知道, 它是

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2}(d-2)(d-3)-g \\ &= \frac{1}{2}(4\cdot 3)-4=2, \end{aligned}$$

即, 在 S 上有两个 3 次束。因此, *亏格为 4 的一般 Riemann 曲面可用两种方法表示为 $\mathbb{P}^1$ 的 3 叶覆盖。*

实际上确定这两个束是有意义的。在上面最后一节我们看到, S 的典范曲线是 $\mathbb{P}^3$ 中二次曲面 Q 和三次曲面 Q' 的光滑相交; 一般地, 二次曲面是光滑的。现在, $\mathbb{P}^3$ 中的光滑二次曲面(在下面第478–480页讨论)包含两个直线族 $\{L_t\},\{L'_t\}$, 每个都由 $t\in\mathbb{P}^1$ 来参数化; 因为 S 在 Q 上被三次曲面 Q' 切出来, 所以每条直线 L_t 和 L'_t 与 S 相交于三个点; 于是除子

$$D_t=L\cap S \quad 和 \quad D'_t=L'_t\cap S$$

形成 S 上两个 3 次束。反过来, 如果 $D=\sum_{i=1}^{3}p_i$ 是包含三个共线点的任意除子, 那么, 与 Q 相交于三个点的直线 $L=\overline{p_1p_2p_3}$ 必然处在 Q 中; 因此 L 是 L_t 或 L'_t, 并且 D 是 D_t 或 D'_t。

注意, 如果 Q 是奇异的, 那么 S 将只包含一个 3 次束; 从 S 的任意点到超平面的 S 的投影将没有两个普通二重点, 而有一个自切点。

$g=6$: 如果 $D=\sum_{i=1}^{4}p_i$ 是亏格为 6 的曲线 S 上的 4 次除子, 且 $\dim|D|=1$, 那么, 除子 $K-D$ 的次数为 $2g-2-4=6$, 并且由 Riemann–Roch 公式得到,

$$\begin{aligned} h^0(K-D) &= \deg(K-D)-g+1+h^0(D) \\ &= 6-6+1+2 \\ &= 3, \end{aligned}$$

即, 完备线性系 $|K-D|$ 的维数为 2。因此, S 上 4 次束的数目是 6 次网的数目; 这个数目正是我们要计算的。

现在, 由几何上的 Riemann–Roch 公式, S 上 $\dim|D|=2$ 的 6 次除子 D 由张开 $\mathbb{P}^5$ 中 3 维平面的 S 的典范曲线上的六个点组成; 并且如果 $p,q\in S$ 是 S 上每个 6 次网的一般点, 那么将存在一个包含 p 和 q 的这样的除子。还有, 如果 $D=p+q+r_1+\cdots+r_4$ 是这样的除子, 那么, 在从直线 $L=\overline{pq}$ 到 3 维平面上 S 的投影

$$\pi_L:S\to\mathbb{P}^3$$

下, 点 r_i 的像就是共线的, 并且反过来, 如果任意 $\pi_L(S)$ 的四个点 $\pi_L(r_i)$ 是共线的, 那么点 $p, q, r_1, \cdots, r_4$ 都处在由 L 和 $\{\pi_L(r_i)\}$ 张开的 3 维平面中。因此, S 上 6 次网的数目是 $\mathbb{P}^3$ 中 $\pi_L(S)$ 的五次割线的数目。因为 $\pi_L(S)$ 的次数为 $d = \deg(S) - 2 = 8$ 和亏格为 $g = 6$, 所以由前面的公式, 这个数目为

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{12}\cdot 6\cdot 6\cdot 5\cdot 4 - \frac{1}{2}6(64 - 56 + 13 - 6) \\ &= 50 - 3\cdot 15 = 5。\end{aligned}$$

我们看到, 亏格为 6 的一般 *Riemann* 曲面可用五种方法表示为 $\mathbb{P}^1$ 的 4 叶覆盖。

$g = 8$: 如果 D 是亏格为 8 的 Riemann 曲面上的 5 次除子, 且 $\dim|D| = 1$, 那么, 除子 $K - D$ 的次数为 $14 - 5 = 9$, 并且

$$\begin{aligned} h^0(K-D) &= \deg(K-D) - g + 1 + h^0(D) \\ &= 9 - 8 + 1 + 2 \\ &= 4, \end{aligned}$$

即, $\dim|K-D| = 3$。那么, 由 Riemann–Roch 公式, D 将由 S 的典范曲线上张开 3 维平面的五个点所表示, 而 $K - D$ 将由张开 5 维平面的 S 的九个点所表示。

为了计算 S 上 5 次束的数目, 我们首先证明

引理: *如果 D, D' 是 S 上的两个 5 次除子, $\dim|D| = \dim|D'| = 1$, 那么, 当且仅当 D 和 D' 不线性等价时, 存在一个包含 D 的除子 $E \subset |K - D'|$; 如果 E 存在, 那么它是唯一的。*

证明: 我们要证明,

$$h^0(K - D - D') = \begin{cases} 1, & 如果 D \not\sim D', \\ 0, & 如果 D \sim D'。\end{cases}$$

(注意, 因为 C 是一般的, 所以它没有 4 次束; 因此

$$h^0(K - D - D') \leqslant 1。)$$

由 Riemann–Roch 公式得到,

$$\begin{aligned} h^0(K-D-D') &= \deg(K-D-D') - g + 1 + h^0(D+D') \\ &= 4 - 8 + 1 + h^0(D+D'), \end{aligned}$$

即, 我们必须证明,

$$h^0(D + D') = \begin{cases} 3, & 如果 D \sim D', \\ 4, & 如果 D \not\sim D'。\end{cases}$$

但是现在, 如果 $h^0(D + D')$ 是 3——即, 如果 $|D + D'|$ 由 $\mathbb{P}^2$ 参数化——那么, 对任意 $D_0 \in |D|, D_0' \in |D'|$, 两条直线 $D_0 + |D'|$ 和 $D_0' + |D| \subset |D + D'|$ 将相交; 那么我们将得到 $D_0 \in |D'|$ 和 $D \sim D'$。

另一方面, 任意除子 $G \subset |K-D|$ 由张开 5 维平面的九个点组成, 并且因此处在 $\mathbb{P}^7$ 中超平面的束 $\{H_i\}$ 上; 除子

$$D_t = (H_t \cdot C) - G$$

由线性系 $\{D_t\}$ 组成。那么显然, 对 $t \neq t'$, D_t 和 D'_t 将不处在 $\mathbb{P}^7$ 中的超平面中, 即, $K - D_t - D_{t'} \sim K - 2D$ 不是有效除子。 证毕

现在, 假设 $D = \sum_{i=1}^{5} p_i$ 是 S 上的 5 次除子, 且 $\dim |D| = 1$。那么, 由我们的引理得到, S 中不是 D 的 5 次束正好对应于包含 D 的典范曲线 $S \subset \mathbb{P}^7$ 的九次割线的 5 维平面。如果 $\overline{p_1, \cdots, p_5, q_1, \cdots, q_4}$ 是任意九次割线的 5 维平面, 那么, 在从 3 维平面 $V = \overline{p_1, \cdots, p_5}$ 的 S 的投影

$$\pi_V : S \to \mathbb{P}^3$$

下, 点 q_i 的像将是共线的, 反之亦然。因此, S 上不是 $|D|$ 的 5 次束的数目就是 $\pi_V(S) \subset \mathbb{P}^3$ 的五次割线的数目。$\pi_V(S)$ 的次数为 $d = \deg(S) - 5 = 9$, 并且因此这个数目为

$$\frac{1}{12} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (81 - 63 + 13 - 8) = 105 - 4 \cdot 23 = 13。$$

总之, 我们得到, 亏格为 8 的一般 Riemann 曲面可用 14 种方法表示为 $\mathbb{P}^1$ 的 5 叶覆盖。

6. 复环面和 Abel 簇

Riemann 条件

在分析紧致 Riemann 曲面和它的 Jacobi 簇之间的关系前, 我们在这里给出复环面一般理论的介绍。

首先, 我们给出一个定义: 对 n 维复矢量空间 V, 最大秩为 $2n$ 的离散格子 $\Lambda \subset V$, 如果复环面 $M = V/\Lambda$ 是射影代数簇, 即, 如果它容许嵌入到射影空间中, 那么, 称之为 *Abel* 簇。

我们的首要任务是确定什么时候复环面 $M = V/\Lambda$ 是一个 Abel 簇。因为 M 的上同调容易用 V 和 Λ 的方式表示, 所以 Kodaira 嵌入定理将给出充要条件; 随后, 我们将通过直接计算来验证这些条件的充分性。首先, 对复环面上同调做一些一般性的评论。

设 $M = V/\Lambda$ 如上。因为 Λ 是 V 的子群, 所以 M 同样也有群结构: 对任意 $\mu \in M$ 和 μ 上的任意 $x \in V$, 映射

$$\begin{aligned} \tau_\mu \ &: \ V \to V \\ &: \ v \mapsto v + x \end{aligned}$$

诱导出一个映射 $\tau_\mu : M \to M$, 称为按照 μ 的平移。

现在, 对每个 $\mu \in M$, 我们得到一个自然等价

$$T'_\mu(M) \cong V;$$

因此, 矢量空间 V 上的任意厄米内积给出 M 上一个 Kähler 度量, 它在自同构 $\{\tau_\mu\}$ 下不变。我们首先声明, 关于这样的度量的调和形式正好是 $\{\tau_\mu\}$ 下的不变形式。为此, 首先注意到, 因为 τ_μ 保持度量, 所以 $\tau_\mu^*: A^*(M) \to A^*(M)$ 把调和形式变成调和形式。于是, 因为 τ_μ 同伦于恒等映射, 并且由 Hodge 定理, $\mathscr{H}^*(M)$ 全纯地映射到 $H^*(M, \mathbb{C})$, 所以

$$\tau_\mu^*: \mathscr{H}^*(M) \to \mathscr{H}^*(M)$$

就是恒等元, 即, *调和形式是不变量*。但是现在, M 上的不变形式由它在点 p 处 M 的切空间 $T_{p,\mathbb{C}}(M) = T_p'(M) \oplus T_p''(M)$ 的值所确定, 并且这个切空间自然等价于矢量空间 $V \oplus \overline{V}$。设 $\mathscr{J}^*(M)$ 表示 M 上不变形式空间后, 那么,

$$\mathscr{J}^*(M) = \wedge^*(T_{p,\mathbb{C}}(M)^*) \cong \wedge^* V^* \otimes \wedge^* \overline{V}^*。$$

但是我们知道, 在拓扑上 $M \cong (S^1)^{2n}$, 因此 k 次调和形式空间的维数是 $\binom{2n}{k}$; 因为 $\mathscr{H}^*(M) \subset \mathscr{J}^*(M)$, 所以我们计算维数得到

$$H^*(M, \mathbb{C}) \cong \mathscr{H}^*(M) = \wedge^* V \otimes \wedge^* \overline{V}^*。$$

因此, 如果 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 V 上的欧氏坐标, $\{dz_1, \cdots, dz_n\}$ 和 $\{d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n\}$ 是 M 上相应的整体 1 形式, 那么,

$$\mathscr{H}^*(M) = \mathbb{C}\{dz_I \wedge d\bar{z}_J\}_{I,J},$$

其中,

$$\mathscr{H}^{p,q}(M) = \mathbb{C}\{dz_I \wedge d\bar{z}_J\}_{\# I=p, \# J=q}。$$

另一方面, 注意到, 基点为 $[0] \in M$ 的任意环路 $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ 提升到 V 中起始于 0 结束于点 $\lambda \in \Lambda \subset V$ 的路径 $\tilde{\gamma}$; 因为 V 是 M 的泛覆盖空间, 那么我们可以得到等式

$$H_1(M, \mathbb{Z}) = \Lambda。$$

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n} \in \Lambda$ 是形成 Λ 的整基的格子矢量; $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$ 也将是实矢量空间 V 的基。设 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 是 V 上的对偶实坐标并且 $dx_1, \cdots, dx_{2n}$ 是 M 上相应 1 形式。于是,

$$\int_{\lambda_i} dx_j = \delta_{ij},$$

即,

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\{dx_1, \cdots, dx_{2n}\}$$

和一般地有

$$H^k(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\{dx_I\}_{\# I=k}。$$

因此, 我们有 M 的上同调的两个不同基: 第一, 反映 $H^*(M)$ 上复结构的 $\{dz_\alpha, d\bar{z}_\alpha\}$, 第二, 反映有理结构的 $\{dx_i\}$。现在, Kodaira 嵌入定理称, M 是代数的, 当且仅当存在 M 上

的一个 *Hodge* 形式, 即, 表示有理上同调类的 $(1,1)$ 型正定闭形式。还有, 如果 $\tilde{\omega}$ 是任意这样的形式, 写作

$$\tilde{\omega} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \tilde{h}_{\alpha\beta}(z)dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

并且 $d\mu$ 是 M 上的不变欧氏测度, 且 $\mu(M)=1$, 那么, 我们可以设

$$h_{\alpha\beta} = \int_M \tilde{h}_{\alpha\beta}(z)d\mu$$

和

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum h_{\alpha\beta}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

来得到一个不变形式, 它也是 $(1,1)$ 型正定闭形式, 并且是整形式。因此, M 有一个 Hodge 形式当且仅当它有一个不变 Hodge 形式。因此, 为了确定这样的形式是否存在, 我们必须把 $H^*(M)$ 的两个基联系起来。

设 $\Pi = (\pi_{i\alpha})$ 为 $2n \times 2n$ 矩阵, 使得

$$dx_i = \sum_\alpha \pi_{i\alpha}dz_\alpha + \sum_\alpha \overline{\pi_{i\alpha}}d\bar{z}_\alpha,$$

即, 使得 $2n \times 2n$ 矩阵 $\tilde{\Pi} = (\Pi, \overline{\Pi})$ 给出从 $\{dz_\alpha, d\bar{z}_\alpha\}$ 到 $\{dx_i\}$ 的变换。于是, 如果 ω 是一个不变整 2 形式, 那么我们可以写出

$$\omega = \frac{1}{2}\sum q_{ij}dx_i \wedge dx_j,$$

其中 $Q=(q_{ij})$ 是一个整数反对称 $2n \times 2n$ 矩阵。用 $dz_\alpha, d\bar{z}_\alpha$ 的方式, 我们得到

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2}\sum q_{ij}(\pi_{i\alpha}dz_\alpha + \bar{\pi}_{i\alpha}d\bar{z}_\alpha)\wedge(\pi_{j\beta}dz_\beta + \bar{\pi}_{j\beta}d\bar{z}_\beta)\\ &= \frac{1}{2}\sum q_{ij}\pi_{i\alpha}\pi_{i\beta}dz_\alpha \wedge dz_\beta + \frac{1}{2}\sum q_{ij}\bar{\pi}_{i\alpha}\bar{\pi}_{j\beta}d\bar{z}_\alpha \wedge d\bar{z}_b\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum q_{ij}(\pi_{i\alpha}\bar{\pi}_{j\beta} - \bar{\pi}_{i\beta}\pi_{j\alpha})dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta。\end{aligned}$$

由此我们知道, ω 是 $(1,1)$ 型的当且仅当系数矩阵

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} q_{ij}\pi_{i\alpha}\pi_{j\beta}\right) =^t \Pi \cdot Q \cdot \Pi$$

等于零, 并且如果这样的话, 那么 ω 是正定的当且仅当

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\sum_{i,j} q_{ij}(\pi_{i\alpha}\bar{\pi}_{j\beta} - \bar{\pi}_{i\beta}\pi_{j\alpha})\right)_{\alpha\beta}\\ = \quad &\frac{1}{2\sqrt{-1}}({}^t\Pi Q\overline{\Pi} -{}^t \Pi^t Q\overline{\Pi}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,{}^t\Pi Q\overline{\Pi}\end{aligned}$$

是厄米正定的, 由此我们得到

Riemann 条件 I M 是一个 *Abel* 簇当且仅当存在一个整数反对称矩阵 Q 使得

$$^t\Pi \cdot Q \cdot \Pi = 0$$

和

$$-\sqrt{-1}^t\Pi Q\overline{\Pi} > 0。$$

我们也可以把这些条件用方矩阵 $\tilde{\Pi} = (\Pi, \overline{\Pi})$ 的方式表示出来:

$$^t\tilde{\Pi} \cdot Q \cdot \overline{\tilde{\Pi}} = \begin{pmatrix} ^t\Pi \\ ^t\overline{\Pi} \end{pmatrix} \cdot Q \cdot (\overline{\Pi}, \Pi) = \begin{pmatrix} ^t\Pi \cdot Q \cdot \overline{\Pi} & ^t\Pi \cdot Q \cdot \Pi \\ ^t\overline{\Pi} \cdot Q \cdot \overline{\Pi} & ^t\overline{\Pi} \cdot Q \cdot \Pi \end{pmatrix},$$

和 $^t\overline{\Pi}Q\Pi =^t (^t\Pi Q\overline{\Pi}) = -^t(^t\Pi \cdot Q \cdot \overline{\Pi})$, 所以, M 是 Abel 簇当且仅当存在一个整数反对称矩阵 Q, 使得

$$-\sqrt{-1}^t\tilde{\Pi} \cdot Q \cdot \overline{\tilde{\Pi}} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -^tH \end{pmatrix},$$

并且 $H > 0$。

Riemann 条件的通常形式是在对偶基变换矩阵的方式中。对 Λ 的整基 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$ 和 V 的复数基 $e_1, \cdots, e_n$, 我们把 $\Lambda \subset V$ 的周期矩阵取为 $n \times 2n$ 矩阵 $\Omega = (\omega_{\alpha i})$, 使得

$$\lambda_i = \sum_\alpha \omega_{\alpha i} e_\alpha。$$

于是我们得到,

$$\begin{aligned} dz_\alpha &= \sum_i \omega_{\alpha i} dx_i, \\ d\bar{z}_\alpha &= \sum_i \overline{\omega}_{\alpha i} dx_i, \end{aligned}$$

使得矩阵 $\tilde{\Omega} = \binom{\Omega}{\overline{\Omega}}$ 给出从 $\{dx_i\}$ 到 $\{dz_\alpha, d\bar{z}_\alpha\}$ 的坐标变换。于是,

$$\tilde{\Omega} \cdot \tilde{\Pi} = I_{2n} \quad 或 \quad \Omega\Pi = I_m, \quad \Omega\overline{\Pi} = 0。$$

现在,

$$-\sqrt{-1}^t\tilde{\Pi} \cdot Q \cdot \overline{\tilde{\Pi}} = -\sqrt{-1}^t\tilde{\Omega}^{-1} \cdot Q \cdot \overline{\tilde{\Omega}}^{-1},$$

并且由此在 Ω 的方式下, 我们可以把 Riemann 条件写作

$$\sqrt{-1} \cdot \overline{\tilde{\Omega}} \cdot Q^{-1} \cdot^t \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & -^tH^{-1} \end{pmatrix},$$

其中, $H > 0$。但是, $H > 0 \Leftrightarrow H^{-1} > 0$; 因此,

Riemann 条件 II M 是 $Abel$ 簇当且仅当存在一个整数反对称矩阵 Q 满足

$$\Omega\cdot Q^{-1}\cdot{}^t\,\Omega=0,\qquad -\sqrt{-1}\Omega\cdot Q^{-1}\cdot{}^t\,\overline{\Omega}>0。$$

可注意到, $\Lambda\subset V$ 的周期矩阵 Ω 依赖于 Λ 和 V 的基的选择。通过对它们的选择相对于给定形式进行归一化, 我们可以部分简化 Riemann 条件。首先, 我们证明

引理: 如果 $Q(\quad,\quad)$ 是 $\Lambda=\mathbb{Z}^{2n}$ 上的整数反对称二次形式, 那么存在 Λ 的一组基 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{2n}$, 在它的方式下, Q 由下列矩阵给出:

$$Q=\begin{pmatrix}0&\Delta_\delta\\-\Delta_\delta&0\end{pmatrix},\qquad \Delta_\delta=\begin{pmatrix}\delta_1&&0\\&\ddots&\\0&&\delta_n\end{pmatrix},\quad \delta_i\in\mathbb{Z}。$$

证明: 对每个 $\lambda\in\Lambda$, 值的集合 $\{Q(\lambda,\lambda'),\lambda'\in\Lambda\}$ 形成 $\mathbb{Z}$ 中的主理想 $d_\lambda\mathbb{Z},d_\lambda\geqslant 0$。设 $\delta_1=\min(d_\lambda:\lambda\in\Lambda,d_\lambda\neq 0)$, 并且取 λ_1 和 λ_{n+1} 使得 $Q(\lambda_1,\lambda_{n+1})=\delta_1$。于是, 对每个 $\lambda\in\Lambda$, δ_1 整除 $Q(\lambda,\lambda_1)$ 和 $Q(\lambda,\lambda_{n+1})$, 并且我们可以写出,

$$\lambda+\frac{Q(\lambda,\lambda_1)}{\delta_1}\cdot\lambda_{n+1}-\frac{Q(\lambda,\lambda_{n+1})}{\delta_1}\cdot\lambda_1\in\mathbb{Z}\{\lambda_1,\lambda_{n+1}\}^{\perp},$$

即,

$$\Lambda=\mathbb{Z}\{\lambda_1,\lambda_{n+1}\}\oplus\mathbb{Z}\{\lambda_1,\lambda_{n+1}\}^{\perp}。$$

设 $\Lambda'=\mathbb{Z}\{\lambda_1,\lambda_{n+1}\}^{\perp}$; 我们可以重复这个过程, 得到两个元素 λ_2,λ_{n+2}, 使得

$$\Lambda'=\mathbb{Z}\{\lambda_2,\lambda_{n+2}\}\oplus\mathbb{Z}\{\lambda_2,\lambda_{n+2}\}^{\perp}。$$

用这种方法继续下去, 我们得到 Λ 的一组基 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2n})$, 它有所期望的性质。

注意, 得到的整数 $\{\delta_i\}$ 满足 $\delta_1|\delta_2,\delta_2|\delta_3$ 等等: 例如, 如果 $\delta_1\not|\delta_2$, 那么, 对某些 k, 我们将得到

$$0<Q(k\lambda_1+\lambda_2,\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2})<\delta_1。$$

我们观察到, 在相加条件 $\delta_i|\delta_{i+1}$ 下, 整数 δ_i 是二次形式 Q 的不变量。 证毕

从引理我们看到, 如果 ω 是任意 $M=V/\Lambda$ 上的整数不变 2 形式, 那么我们可以找到 Λ 的一组基 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{2n}$, 使得在 V 的对偶坐标 $x_1,\cdots,x_{2n}$ 下,

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\delta_i dx_i\wedge dx_{n+i},\quad \delta_i\in\mathbb{Z}。$$

现在, 如果 ω 是非退化的——即, 如果 $\omega^n\neq 0$, 就象 ω 是正定的情形——那么, 对所有 α 有 $\delta_\alpha\neq 0$, 并且我们可以把矢量

$$e_\alpha=\delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha,\quad \alpha=1,\cdots,n$$

取作复矢量空间 V 的基。于是 $\Lambda \subset V$ 的周期矩阵的形式为

$$\Omega = (\Delta_\delta, Z);$$

这样的周期矩阵称为归一的。就象以前一样, ω 是 $(1,1)$ 型的, 如果

$$\Omega \cdot Q_\delta^{-1} \cdot {}^t\Omega = 0,$$

即, 如果

$$\begin{aligned}(\Delta_\delta, Z)\begin{pmatrix} 0 & -\Delta_{\delta^{-1}} \\ \Delta_{\delta^{-1}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_\delta \\ {}^tZ \end{pmatrix} &= (\Delta_\delta, Z)\begin{pmatrix} -\Delta_\delta^{-1} \cdot {}^tZ \\ I \end{pmatrix} \\ &= Z - {}^tZ = 0,\end{aligned}$$

即, Z 是对称的; 并且 ω 也是正的, 如果

$$-\sqrt{-1} \cdot \Omega \cdot Q_\delta^{-1} \cdot {}^t\overline{\Omega} > 0,$$

即, 如果

$$-\sqrt{-1}(\Delta_\delta, Z)\begin{pmatrix} 0 & -\Delta_{\delta^{-1}} \\ \Delta_{\delta^{-1}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_\delta \\ {}^t\overline{Z} \end{pmatrix} = -\sqrt{-1}(Z - {}^t\overline{Z}) = 2 \cdot \mathrm{Im}Z > 0$$

于是我们得到

Riemann 条件 III *$M = V/\Lambda$ 是 Abel 簇当且仅当存在 Λ 的一个整数基 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$ 和 V 的复数基 $e_1, \cdots, e_n$ 使得*

$$\Omega = (\Delta_\delta, Z),$$

其中, Z 是对称的且 $\mathrm{Im}Z$ 是正定的。

注意, 上面的矩阵 Π 在基 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}\}$ 和 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下同样得到相对简单的形式: 解

$$(\Pi, \overline{\Pi}) \cdot \begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} = I_{2n},$$

我们得到,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\mathrm{Im}Z)^{-1}, \\ \Pi_1 &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Delta_\delta^{-1}\overline{Z}(\mathrm{Im}Z)^{-1}。\end{aligned}$$

在 Abel 簇 $M=V/\Lambda$ 上 Hodge 形式 ω 的上同调类 $[\omega]$ 称为 M 的极化。在对偶于 Λ 的整数基的坐标 $\{x_i\}$ 下, ω 的表达式

$$\omega=\sum\delta_\alpha dx_\alpha\wedge dx_{n+\alpha},\quad \delta_\alpha|\delta_{\alpha+1}$$

中的整数 δ_i 是类 $[\omega]$ 的不变量, 并且称为极化的基本除子; 如果对所有 α 有 $\delta_\alpha=1$, 那么 $[\omega]$ 称为主极化。

现在, 如果 S 是亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面, 且 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 的基为 $\delta_1,\cdots,\delta_{2g}$ 和 $H^0(S,\Omega^1)$ 的基为 $\omega_1,\cdots,\omega_g$, 那么, Jacobi 簇为

$$\mathscr{J}(S)=\frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{2g}\}},$$

其中, λ_i 是列矢量。

对 S 的周期矩阵 Ω 有

$$\lambda_i={}^t\left(\int_{\delta_i}\omega_1,\cdots,\int_{\delta_i}\omega_g\right)。$$

在本章第二节我们已经知道, 如果 $\delta_1,\cdots,\delta_{2g}$ 是 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 的归一基, 那么我们可以选择 $H^0(S,\Omega^1)$ 的基 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 使得

$$\int_{\delta_i}\omega_\alpha=\delta_{i\alpha},\quad 1\leqslant i,\alpha\leqslant g;$$

于是, 周期矩阵的形式为

$$\Omega=(I,Z),$$

并且由第二节证明的两个 Riemann 双线性关系得到, $Z=X+\sqrt{-1}Y$ 是对称的, 且 $Y>0$。因此, $\mathscr{J}(S)$ 是 Abel 簇, 并且还有一个主极化, 在对偶于 $\{\lambda_i\}\in H_1(\mathscr{J}(S),\mathbb{Z})$ 的 $H^1(\mathscr{J}(S),\mathbb{Z})$ 的基 $\{dx_i\}$ 下, 它由

$$\omega=\sum dx_\alpha\wedge dx_{n+\alpha}$$

给出。

在内蕴方式中, Jacobi 簇 $\mathscr{J}(S)=V(S)/\Lambda(S)$, 其中, $V(S)=H^0(S,\Omega^1)^*$ 并且格子 $\Lambda(S)\cong H_1(S,\mathbb{Z})$ 通过积分嵌入到 $V(S)$ 中。极化形式 $\omega\in H^2(\mathscr{J}(S),\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\wedge^2H_1(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ 是反对称双线性形式

$$Q:H_1(S,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}H_1(S,\mathbb{Z})\to\mathbb{Z},$$

它由闭链相交给出; 极化是主极化这个结果是 Poincaré 对偶的反映。注意, 极化类 $[\omega]$ 不依赖于 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 的基 $\delta_1,\cdots,\delta_{2g}$ 的选择。

注记: 直到现在, 我们用 $\alpha=1,\cdots,n$ 来标记 V 的复数基 $\{e_\alpha\}$ 和对偶复数基 $\{z_\alpha\}$; 用 $i=1,\cdots,2n$ 来标记整数基 $\{\lambda_i\}$ 和对偶实数基 $\{x_i\}$。但是, 一旦我们的基归一化后, 我们不再保留记号上的不同; 而是用

$$\{\lambda_\alpha,\lambda_{n+\alpha}\}_{\alpha=1,\cdots,n}\quad 和\quad \{x_\alpha,x_{n+\alpha}\}_{\alpha=1,\cdots,n}$$

来表示整数基。

复环面上的线丛

现在我们来讨论复环面 $M = V/\Lambda$ 上的正定线丛。在第46页已证明的基本结果就是, 因为 $H^1(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}) = H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0$, 所以 $V \cong \mathbb{C}^n$ 上的任意线丛都是平庸的。因此, 如果 $L \to M$ 是任意线丛, 那么 L 到 V 的拖回 π^*L 是平庸的, 并且我们可以找到一个整体平庸化

$$\varphi : \pi^*L \to V \times \mathbb{C}。$$

现在, 对 $z \in V, \lambda \in \Lambda$, 由定义得到, z 和 $z+\lambda$ 处的纤维 π^*L 都等价于 $\pi(z)$ 处 L 的纤维, 并且比较 z 和 $z+\lambda$ 处的平庸化 φ 得到 $\mathbb{C}$ 的一个线性自同构

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\varphi_z} (\pi^*L)_z = L_{\pi(z)} = (\pi^*L)_{z+\lambda} \xrightarrow{\varphi_{z+\lambda}} \mathbb{C}。$$

作为乘法, 这样的自同构由一个非零复数给出; 如果我们用 $e_\lambda(z)$ 表示这个数, 那么我们得到一个函数集合

$$\{e_\lambda \in \mathscr{O}^*(V)\}_{\lambda \in \Lambda},$$

称为 L 的乘子集合。对所有 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, 函数 e_λ 必须满足相容关系

$$e_{\lambda'}(z+\lambda)e_\lambda(z) = e_\lambda(z+\lambda')e_{\lambda'} = e_{\lambda+\lambda'}(z)。$$

反过来, 给定满足这些条件的任意非零整全纯函数 $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的集合, 我们可以构造一个乘子为 $\{e_\lambda\}$ 的线丛 $L \to M$: 我们把 L 取为等价关系

$$(z, \xi) \sim (z+\lambda, e_\lambda(z) \cdot \xi)$$

下 $V \times \mathbb{C}$ 的商空间。注意, 由相容条件, 只要函数 $\{e_{\lambda_\alpha}\}$ 满足

$$(*) \qquad e_{\lambda_\alpha}(z+\lambda_\beta)e_{\lambda_\beta}(z) = e_{\lambda_\beta}(z+\lambda_\alpha)e_{\lambda_\alpha}(z),$$

通过确定 Λ 的某些基 $\{\lambda_\alpha\}$ 的 e_{λ_α} 就可以给出这样的集合 $\{e_\lambda\}$。

现在, 我们的目的是证明, 任意线丛可由一个非常简单性质的乘子 $\{e_\lambda(z)\}$ 给出。我们将把这分为两个阶段: 首先, 利用初等函数 e_λ, 构造有任意陈类的线丛; 接着, 我们将证明, 除了 M 中的一个平移外, 任意正定线丛由它的陈类唯一确定。

直接可以得到一个简化: 如果 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上 Λ 的任意基, 并且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性独立, 那么我们得到

$$\frac{V}{\mathbb{Z}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}} \cong (\mathbb{C}^*)^n,$$

并且可以用

$$V \to \frac{V}{\mathbb{Z}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}} \xrightarrow{\pi_1} M$$

把投影映射 $\pi : V \to M$ 进行分解。现在, 我们已经在第27页看到,

$$H^1((\mathbb{C}^*)^n, \mathscr{O}) = H^2((\mathbb{C}^*)^n, \mathscr{O}) = 0,$$

并且因此得到

$$H^1((\mathbb{C}^*)^n, \mathscr{O}^*) \xrightarrow[\sim]{c_1} H^2((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{Z}),$$

即, $(\mathbb{C}^*)^n$ 上的任意线丛由它的陈类确定。对任意 L, 我们可以选择 Λ 的基 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$, 使得在 V 上的对偶基 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 下,

$$c_1(L) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}。$$

但是 $x_{n+\alpha}$ 是 $V/\mathbb{Z}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 上明确定义的函数, 所以 $[dx_{n+\alpha}] = 0 \in H^1_{\rm DR}(V/\mathbb{Z}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\})$。因此,

$$c_1(\pi_1^* L) = \pi_1^*(c_1(L)) = 0,$$

并且因此 $\pi_1^* L$ 是平庸的。如果我们取平庸化 $\tilde{\varphi} : \pi_1^* L \to (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}$ 并且选择扩张到 $\tilde{\varphi}$ 的 $\pi^* L$ 的平庸化 φ, 那么我们得到

$$e_{\lambda_\alpha}(z) \equiv 1, \qquad \alpha = 1, \cdots, n。$$

现在, 假设 ω 是任意不变整形式, 并且是正定 $(1,1)$ 型的。选择 $\mathbb{Z}$ 上 Λ 的一个基 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$, 使得在 V 上的对偶基 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 下,

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}, \quad \delta_\alpha \in \mathbb{Z}。$$

因为 ω 是非退化的, 所以对所有 α 有 $\delta_\alpha \neq 0$, 并且我们可以设

$$e_\alpha = \delta_\alpha^{-1} \lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, n;$$

设 $z_1, \cdots, z_n$ 是 V 上对偶于基 $e_1, \cdots, e_n$ 的线性坐标。那么, 就象以前一样, 我们可以写出

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \Omega,$$

即,

$$\begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_n \end{pmatrix} = {}^t\Omega(dx_1, \cdots, dx_{2n})$$

其中,

$$\Omega = (\Delta_\delta, Z);$$

并且再次由 Riemann 条件 III 得到, ω 是正定 $(1,1)$ 型的表明 $Z={}^tZ, \mathrm{Im}Z>0$。我们的基本结果是

引理: 由乘子

$$e_{\lambda_\alpha}\equiv 1,\quad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z)=e^{-2\pi i z_\alpha},\quad \alpha=1,\cdots,n$$

给出的线丛 $L\to M$ 的陈类为 $c_1(L)=[\omega]$。

证明: 我们首先验证, 给出的乘子的确满足上面的关系 $(*)$。显然, 对 α 或 $\beta\leqslant n$, $(*)$ 是满足的; 并且写出 $Z=(Z_{\alpha\beta})$ 后, 我们得到所要求的

$$\begin{aligned}
e_{\lambda_{n+\beta}}(z+\lambda_{n+\alpha})\cdot e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) &= e^{-2\pi i(z_\beta+Z_{\beta\alpha}+z_\alpha)}\\
&= e^{-2\pi i(z_\alpha,Z_{\alpha\beta},z_\beta)}\\
&= e_{\lambda_{n+\alpha}}(z+\lambda_{n+\beta})\cdot e_{\lambda_{n+\beta}}(z)。
\end{aligned}$$

现在, 设 $\varphi:\pi^*L\to V\times\mathbb{C}$ 是诱导给定乘子所得到的 π^*L 的平庸化。那么, 对 $U\subset M$ 上 L 的任意截面 $\tilde\theta$, $\theta=\varphi^*(p^*\tilde\theta)$ 是 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个解析函数, 它满足

$$\begin{aligned}
\theta(z+\lambda_\alpha) &= \theta(z),\\
\theta(z+\lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i z_\alpha}\theta(z),
\end{aligned}$$

并且反过来, 任意这样的函数定义 L 的一个截面。现在, 如果 $\|\quad\|$ 是 L 上的任意度量, 那么, 对 L 的任意截面 $\tilde\theta$, 我们可以写出

$$\|\tilde\theta(z)\|^2=h(z)\cdot|\theta(z)|^2;$$

显然, h 将是 z 的正定 C^∞ 函数, 对任意 $\lambda\in\Lambda$ 满足

$$h(z)|\theta(z)|^2=\|\tilde\theta(z)\|^2=h(z+\lambda)|\theta(z+\lambda)|^2;$$

因此,

$$\begin{aligned}
h(z+\lambda_\alpha) &= h(z),\\
h(z+\lambda_{n+\alpha}) &= |e^{2\pi i z_\alpha}|^2h(z)。
\end{aligned}$$

反过来, 任意这样的函数 h 定义 L 上的一个度量。现在, 如前写出 $Z=X+\sqrt{-1}Y$; 因为 $Y>0$, 所以我们可以设 $W=(W_{\alpha\beta})=Y^{-1}$。于是我们主张, 函数

$$h(z)=e^{(\pi/2)\sum W_{\alpha\beta}(z_\alpha-\bar z_\alpha)(z_\beta-\bar z_\beta-2iY_{\beta\beta})}$$

满足上面的泛函方程。显然, $h(z+\lambda_\alpha)=h(z)$; 对其它的, 写出

$$\log h(z+\lambda_{n+\gamma}) = \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta}W_{\alpha\beta}(z_\alpha-\bar z_\alpha+2iY_{\alpha\gamma})(z_\beta-\bar z_\beta+2i(Y_{\beta\gamma}-Y_{\beta\beta}))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha-\bar z_\alpha)(z_\beta-\bar z_\beta-2iY_{\beta\beta})+\frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha-\bar z_\alpha)\cdot 2iY_{\beta\gamma} \\ &\quad +\frac{\pi}{2}\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}\cdot 2iY_{\alpha\gamma}(z_\beta-\bar z_\beta+2i(Y_{\beta\gamma}-Y_{\beta\beta})) \\ &= \log h(z)+\frac{\pi}{2}\sum_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}\cdot 2i(z_\alpha-\bar z_\alpha) \\ &\quad +\frac{\pi}{2}\sum_{\beta}\delta_{\beta\gamma}\cdot 2i(z_\beta-\bar z_b+2i(Y_{\beta\gamma}-Y_{\beta\beta})), \end{aligned}$$

(因为 $Y\cdot W=I$ 和 $W={}^tW$)

$$\begin{aligned} &= \log h(z)+\pi i(z_\gamma-\bar z_\gamma)+\pi i(z_\gamma-\bar z_\gamma) \\ &= \log h(z)-4\pi \mathrm{Im}(z_\gamma); \end{aligned}$$

因此,

$$h(z+\lambda_{n+\gamma})=|e^{2\pi i z_\gamma}|^2 h(z)。$$

现在, 我们可以计算 L 上伴随于度量的曲率形式 Θ_L, 它由 h 给出:

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \partial\bar\partial \log\frac{1}{h} \\ &= -\frac{\pi}{2}\partial\bar\partial\left(\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z_\alpha-\bar z_\alpha)(z_\beta-\bar z_\beta-2iY_{\beta\beta})\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\partial\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}((z_\alpha-\bar z_\alpha)d\bar z_\beta+(z_\beta-\bar z_\beta-2iY_{\beta\beta})d\bar z_\alpha) \\ &= \pi\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}dz_\alpha\wedge d\bar z_\beta。 \end{aligned}$$

我们要把它用基 $\{dx_\alpha, dx_{n+\alpha}\}$ 的方式表示出来; 我们得到,

$$\begin{aligned} dz_\alpha &= \delta_\alpha dx_\alpha+\sum_\beta z_{\alpha\beta}dx_{n+\beta}, \\ d\bar z_\alpha &= \delta_\alpha dx_\alpha+\sum_\beta \overline{z_{\alpha\beta}}dx_{n+\beta}, \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \pi\sum W_{\alpha\beta}dz_\alpha\wedge d\bar z_\beta \\ &= \pi\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}\delta_\alpha\delta_\beta dx_\alpha\wedge dx_\beta \\ &\quad +\pi\sum_{\alpha,\beta,\gamma} W_{\alpha\beta}\delta_\alpha(\overline{Z}_{\beta\gamma}-Z_{\beta\gamma})dx_\alpha\wedge dx_{n+\gamma} \\ &\quad +\pi\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon} W_{\alpha\beta}Z_{\alpha\gamma}\overline{Z}_{\beta\varepsilon}dx_{n+\gamma}\wedge dx_{n+\varepsilon}。 \end{aligned}$$

因为 $W = {}^tW$ 和 $Z = {}^tZ$, 所以三项中的第一和最后一项为零, 并且因此

$$\begin{aligned}\Theta &= \pi\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\delta_\alpha W_{\alpha\beta}(\overline{Z}_{\beta\gamma} - Z_{\beta\gamma})dx_\alpha\wedge dx_{n+\gamma}\\ &= -2\pi\sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\delta_\alpha W_{\alpha\beta}Y_{\beta\gamma}dx_\alpha\wedge dx_{n+\gamma}\\ &= -2\pi\sqrt{-1}\sum_{\alpha}\delta_\alpha dx_\alpha\wedge dx_{n+\alpha},\end{aligned}$$

并且因此最后得到,

$$c_1(L) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right] = [\omega]。$$

证毕

为了继续讨论 M 上的线丛, 我们要考虑有给定正陈类的线丛 $L\to M$ 的集合。我们注意到, 对任意 $\mu\in M$, 平移 $\tau_\mu : M\to M$ 同伦于恒等元, 并且因此, 对任意线丛 $L\to M$,

$$c_1(\pi_\mu^* L) = c_1(L)。$$

还要注意, 如果 L 由乘子

$$e_{\lambda_\alpha}\equiv 1,\quad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}$$

给出, 那么 $\tau_\mu^* L$ 可由乘子

$$\begin{aligned}e'_{\lambda_\alpha} &= e_{\lambda_\alpha}(z+\mu)\equiv 1\\ e'_{\lambda_{n+\alpha}}(z) &= e_{\lambda_{n+\alpha}}(z+\mu)\\ &= e^{-2\pi i(z_\alpha+\mu_\alpha)}\end{aligned}$$

给出, 即, e'_λ 与 e_λ 只差一个乘法常数 $e^{-2\pi i\mu_\alpha}$。反过来, 如果 L' 是任意线丛, 其乘子为 $e'_{\lambda_\alpha}\equiv 1$ 和 $e'_{\lambda_{n+\alpha}}\equiv c_\alpha\cdot e_{\lambda_{n+\alpha}}, c_\alpha\in\mathbb{C}^*$, 那么, 设

$$\mu = \sum\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\log c_\alpha\cdot e_\alpha\in V$$

后, 我们得到,

$$L' = \tau_\mu^* L。$$

因此, 为了证明与 L 有同样陈类的任意线丛必然是 L 的一个平移, 只需证明陈类为 0 的任意线丛可由常数乘子来实现。为了这个目标, 我们首先注意到, 任意紧致 Kähler 流形 X 上的恰当层序列的包含映射

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathscr{O} & \xrightarrow{\exp} & \mathscr{O}^* & \to & 0\\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* & \to & 0\end{array}$$

诱导出交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X,\mathscr{O}) & \to & H^1(X,\mathscr{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X,\mathbb{Z}) \\ \uparrow \iota_1^* & & \uparrow \iota_2^* & & \| \\ H^1(X,\mathbb{C}) & \to & H^1(X,\mathbb{C}^*) & \to & H^2(X,\mathbb{Z}) \end{array}$$ 。

映射 ι_1^* 表示 $H^1(X,\mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$ 在第二个因子上的投影, 并且因此是满射。所以 c_1 核中的任意闭链 $\gamma \in H^1(X,\mathscr{O}^*)$ 在 ι_2^* 的像中, 即, 同调于常数系数的上同调; 因此, X 上陈类为 0 的任意线丛可由常数转换函数给出。

现在, 如果 $L \to M = V/\Lambda$ 是平庸陈类的任意线丛, 那么我们可以找到 M 的一个开覆盖 $\underline{U} = \{U_\alpha\}$, 使得对每个 α, $\pi^{-1}(U_\alpha) = \{U_{\alpha j}\}_j$ 是通过 π 同构于 U_α 的开集的不相交的集合, 并且是常数转换函数为 $\{g_{\alpha j}\}$ 的平庸化 $\varphi_\alpha : L_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ 的一个集合。于是, 通过对某些 α_0, j_0 取 $h_{\alpha_0,j_0} \equiv 1$ 并且对 α, j, α', j' 设 $h_{\alpha j} = h_{\alpha' j'} \cdot g_{\alpha\alpha'}$ 使得 $U_{\alpha j} \cap U_{\alpha' j'} \neq \emptyset$, 我们可以定义常数 $\{h_{\alpha j}\}_{\alpha j}$。不能看出, 由 $\{g_{\alpha\alpha'}\}$ 上的上闭链法则, 它有明确的定义, 并且通过

$$\varphi_{\alpha j} = h_{\alpha j} \cdot \pi^* \varphi_\alpha$$

定义的平庸化

$$\varphi_{\alpha j} : \pi^* L_{U_{\alpha j}} \to U_{\alpha j} \times \mathbb{C}$$

粘在一起得到常数乘子的 $\pi^* L$ 的平庸化。

为了使这个讨论更明了, 我们将更详细地讨论 M 上线丛群的几何。回想一下, 由指数层序列

$$H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathscr{O}) \to H^1(M,\mathscr{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M,\mathbb{Z}),$$

M 上陈类为 0 的全纯线丛群 $\mathrm{Pic}^0(M)$ 为

$$\mathrm{Pic}^0(M) = \frac{H^1(M,\mathscr{O})}{H^1(M,\mathbb{Z})}。$$

现在, $H^1(M,\mathscr{O}) = \mathscr{H}^{0,1}(M)$ 是 M 上 $(1,1)$ 型不变形式空间, 即, V 上的共轭线性泛函空间 $\overline{V} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V},\mathbb{C})$。另一方面, $H^1(M,\mathbb{Z})$ 是 M 上有整数周期的实不变 1 形式空间, 即, V 上在 $\Lambda \subset V$ 上取整数值的实线性泛函空间。映射

$$H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathscr{O})$$

直接由

$$\omega \mapsto \omega^{0,1}$$

给出; 因为对实 ω,

$$\begin{aligned} \int_\lambda \omega &= \int_\lambda \omega^{1,0} + \int_\lambda \omega^{0,1} \\ &= \left(\int_\lambda \omega^{0,1}\right) + \overline{\left(\int_\lambda \omega^{0,1}\right)} \end{aligned}$$

对所有 $\lambda\in\Lambda$ 是整数当且仅当对所有 $\lambda\in\Lambda$,

$$2\mathrm{Re}\int_{\lambda}\omega^{0,1}\in\mathbb{Z},$$

所以我们看到, $H^1(M,\mathscr{O})=\overline{V}^*$ 中 $H^1(M,\mathbb{Z})$ 的像 $\overline{\Lambda}^*$ 正好由 V 上的共轭线性泛函组成, 它的实部是 $\Lambda\subset V$ 上的半整数。因此, $\mathrm{Pic}^0(M)$ 又是一个复环面, 通常称为 M 的对偶 *Abel* 簇并且表示为 $\hat{M}$。

显然, 如果 $x_1,\cdots,x_{2n}$ 是如上对偶于基 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{2n}$ 的 V 上的实坐标, 并且设 x_i^* 表示实泛函 x_i 的线性共轭部分, 那么, x_i^* 形成 Λ^* 的一个基。写作

$$x_i=\sum\pi_{i\alpha}z_\alpha+\sum\overline{\pi}_{i\alpha}\bar{z}_\alpha$$

后, 我们得到,

$$x_i^*=\sum\overline{\pi}_{i\alpha}\bar{z}_\alpha,$$

其中, 就象我们在上面找到的一样,

$$\Pi=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{-1}}{2}\Delta_\delta^{-1}\overline{Z}Y^{-1}\\ \frac{1}{2\sqrt{-1}}Y^{-1}\end{pmatrix}。$$

通过设

$$y_\alpha^*=-x_{n+\alpha}^*,\quad y_{n+\alpha}^*=x_\alpha^*$$

把 Λ^* 的基 $\{x^*\}$ 重新排序后, 我们看到,

$$\begin{aligned}(y_{n+1}^*,\cdots,y_{2n}^*)&=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Delta_\delta^{-1}ZY^{-1}(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)\\&=\Delta_\delta^{-1}Z(y_1^*,\cdots,y_n^*)。\end{aligned}$$

因此, 如果我们把基本除子 δ_α 排序使得 $\delta_1|\delta_2|\cdots|\delta_n$, 那么我们可以设

$$e_\alpha^*=\frac{\delta_\alpha}{\delta_n}y_\alpha^*;$$

于是我们得到

$$(y_1^*,\cdots,y_n^*)=\delta_n\Delta_\delta^{-1}(e_1^*,\cdots,e_n^*)$$

和

$$(y_{n+1}^*,\cdots,y_{2n}^*)=\delta_n\Delta_\delta^{-1}Z\Delta_\delta^{-1}(e_1^*,\cdots,e_n^*)。$$

于是, 在 Λ^* 的基 (y_α^*) 和 $\overline{V}^*$ 的基 (e_α^*) 下, $\hat{M}$ 的周期矩阵为

$$\Omega^*=(\delta_n\Delta_\delta^{-1},\delta_n\Delta_\delta^{-1}Z\Delta_\delta^{-1})。$$

因为对所有 α 有 $\delta_\alpha|\delta_n$, 所以 $\delta_n\Delta_\delta^{-1}$ 还是对角的和整数的; 并且因为

$$\begin{aligned}{}^t(\delta_n\Delta_d^{-1}Z\Delta_\delta^{-1})&=\delta_n\,{}^t\Delta_\delta^{-1}\,{}^tZ^t\Delta_\delta^{-1}\\&=\delta_n\Delta_d^{-1}Z\Delta_\delta^{-1}\end{aligned}$$

和

$$\mathrm{Im}(\delta_n\Delta_\delta^{-1}Z\Delta_\delta^{-1}) = \delta_n\Delta_\delta^{-1}Y\Delta_\delta^{-1}$$

还是正定的, 所以我们看到 $\hat{M}$ 是 Abel 簇; 的确, M 上的初始极化诱导出“对偶”基本除子为 $\{d_n/\delta_\alpha\}$ 的 $\hat{M}$ 上的一个极化。

现在, 设 L 是 M 上的正定线丛。我们可以通过

$$\varphi_L(\mu) = L^{-1}\otimes\tau_\mu^*L$$

定义一个映射

$$\varphi_L : M \to \mathrm{Pic}^0(M)。$$

我们要在关于 L 归一化的 Λ 的基 $\{\lambda_\alpha\}$ 和 V 的基 $\{e_\alpha\}$ 下, 以及在 Λ^* 的对偶基 $\{y_\alpha^*\}$ 和 $\overline{V}^*$ 的基 $\{e_\alpha^*\}$ 下明确地来讨论 φ_L。

首先, 我们确定出映射

$$H_{\bar\partial}^{0,1}(M) \xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathscr{O}) \to \mathrm{Pic}^0(M),$$

其中 δ 是 Dolbeault 同构。如果

$$\sigma = \sum \sigma_\alpha d\bar{z}_\alpha, \quad \sigma_\alpha\in\mathbb{C}$$

是 M 上的常数 $(0,1)$ 形式, 那么, 在足够细分的开覆盖的每个开集中, 我们可以写出

$$\sigma = \bar\partial f_i(z),$$

其中, 对 z_α 的分支的适当选择, 得到

$$f_i(z) = \sum \sigma_\alpha\bar{z}_\alpha。$$

因此, 伴随于 σ 的线丛的转换函数为

$$g_{ij}(z) = e^{2\pi i(f_i(z)-f_j(z))},$$

并且相应地, 在适当的平庸化下, 乘子为

$$e_{\lambda_\alpha}(z) = e^{-2\pi i\delta_\alpha\sigma_\alpha}, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i\sum\sigma_\beta\overline{Z}_{\alpha\beta}}。$$

用函数

$$f(z) = e^{2\pi i\sum\sigma_\alpha z_\alpha}$$

乘以平庸化得到归一化乘子

$$\begin{aligned} e_{\lambda_\alpha}(z) &= 1, \\ e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) &= e^{-2\pi i\sum\sigma_\beta(\overline{Z}_{\alpha\beta}-Z_{\alpha\beta})} \\ &= e^{-4\pi\sum\sigma_\beta Y_{\alpha\beta}}, \end{aligned}$$

其中 $Y = \mathrm{Im}Z$ 如上。在 V 上的坐标 x^*_α 下, 我们看到, 伴随于

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x^*_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum \delta_\alpha^{-1} c_\alpha Z_{\alpha\beta} Y^{-1}_{\beta\gamma} dz_\gamma$$

的线丛的乘子为

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i \sum \delta_\alpha^{-1} c_\alpha Z_{\alpha\beta}},$$

同样, 对应于

$$\sum c_\alpha x^*_{n+\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum c_\alpha Y^{-1}_{\alpha\beta} d\bar{z}_\beta$$

的线丛的乘子为

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\beta}}(z) = e^{2\pi i c_\alpha}。$$

另一方面, 因为对任意 $\mu = \sum \mu_\alpha e_\alpha \in V$, 线丛 L 由

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i z_\alpha}$$

给出, 所以 $\tau^*_\mu L$ 由

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i (z_\alpha + \mu_\alpha)}$$

给出; 因此, $\varphi(L) = L^{-1} \otimes \tau^*_\mu L$ 的乘子为

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\beta}} = e^{-2\pi i \delta_\alpha c_\alpha},$$

即,

$$\varphi_L(\sum c_\alpha \lambda_\alpha) = -\sum c_\alpha \delta_\alpha x^*_{n+\alpha} = \sum c_\alpha \delta_\alpha y^*_\alpha,$$

并且, 如果 $v = \sum c_\alpha \lambda_{n+\alpha} = \sum c_\alpha Z_{\alpha\beta} e_\beta$, 那么 $\varphi_L(\sum c_\alpha \lambda_{n+\alpha})$ 的乘子为

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\beta}} = e^{-2\pi i Z_{\alpha\beta}},$$

即,

$$\varphi_L(\sum c_\alpha \lambda_{n+\alpha}) = \sum \delta_\alpha c_\alpha x^*_\alpha = \sum c_\alpha \delta_\alpha y^*_{n+\alpha}。$$

(这最后两个断言是等价的, 因为 φ_L 是复线性的并且因此

$$\begin{aligned}
\varphi_L(\sum c_\alpha \lambda_{n+\alpha}) &= \varphi_L(\sum c_\alpha Z_{\alpha\beta} \delta_\beta^{-1} \lambda_\beta) \\
&= \sum c_\alpha Z_{\alpha\beta} y^*_\beta \\
&= \sum c_\alpha Z_{\alpha\beta} (\delta_n / \delta_\beta) e^*_\beta \\
&= \sum c_\alpha \delta_\alpha \delta_n (\delta_\alpha^{-1} Z_{\alpha\beta} \delta_\beta^{-1} e^*_\beta) \\
&= \sum c_\alpha \delta_\alpha y^*_{n+\alpha}。)
\end{aligned}$$

在任何情况下, 由此我们显然得到, φ_L 的核正好是由 $\{\delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha, \delta_\alpha^{-1}\lambda_{n+\alpha}\}$ 生成的 M 的子群; 即, 线丛 L 正好在 $\Pi\delta_\alpha^2$ 平移

$$\{\tau_v : v \in \mathbb{Z}\{\delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha, \delta_\alpha^{-1}\lambda_{n+\alpha}\}\}$$

下是固定的。

θ 函数

在把 Abel 簇 $M = V/\Lambda$ 上的正定线丛 $L \to M$ 描写为平庸丛 $V \times \mathbb{C}$ 的商后, 我们因此可以把 L 的整体截面实现为满足一定泛函方程的 $V \cong \mathbb{C}^n$ 上的整全纯函数。这些函数称为 θ 函数, 并且为了研究它们, 我们要证明

定理: 设 $L \to M$ 是任意正定线丛, 并且设 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ 是 M 的极化 $c_1(L)$ 的基本除子。那么,

1. $\dim H^0(M, \mathscr{O}(L)) = \prod_\alpha \delta_\alpha$。
2. 当 $k \geqslant 2$ 时, $H^0(M, \mathscr{O}(L^k))$ 没有基点, 并且当 $k \geqslant 3$ 时给出一个嵌入。

在证明这个定理之前, 我们作几个评论。首先, 因为 $K_M = 0$, 所以由 Kodaira 消没定理得到,

$$h^p(M, \mathscr{O}(L)) = h^p(M, \Omega^n(L)) = 0, \quad p > 0,$$

并且因此

$$h^0(M, \mathscr{O}(L)) = \chi(L)。$$

另一方面, 我们可以找到 $H^1(M, \mathbb{Z})$ 的整数基 $\{dx_1, \cdots, dx_{2n}\}$, 使得

$$c_1 = \sum \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

并且因此

$$c_1(L)^n = n! \prod \delta_\alpha \in H^{2n}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}。$$

因此, 断言 1 可以看作一般 Riemann–Roch 公式的特殊例子, 用拓扑不变量的方式来表示线丛的全纯 Euler 示性数。

由于 Lefschetz 定理, 断言 2 有更深的意义, 并且将在后面出现。

为了证明第一个陈述, 选择 Λ 的整数基 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}\}$, 使得在对偶坐标 $x_1, \cdots, x_{2n}$ 下,

$$c_1(L) = \sum \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}。$$

如前设

$$e_\alpha = \delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha,$$

并且设 $z_1, \cdots, z_n$ 是 V 上相应的复坐标, 使得 $\Lambda \subset V$ 的周期矩阵 Ω 的形式为

$$\Omega = (\Delta_\delta, Z),$$

其中, $Z = X + \sqrt{-1}Y$ 是对称的, 并且 $Y > 0$。

现在, 我们已经知道, 线丛 L 是由乘子

$$e_{\lambda_\alpha}\equiv 1,\quad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z)=e^{-2\pi i z_\alpha}$$

给出的线丛 L_0 的平移。因为 $h^0(L)$ 在平移下显然是不变的, 所以我们将对 $L=\tau_\mu^* L_0$ 证明断言 1, 其中,

$$\mu=\frac{1}{2}\sum Z_{\alpha\alpha}\cdot e_\alpha。$$

于是, L 的乘子是

$$e_{\lambda_\alpha}\equiv 1,\quad e_{\lambda_{n+\alpha}}=e^{-2\pi i z_\alpha-\pi i Z_{\alpha\alpha}},$$

并且因此 L 的整体截面 $\tilde{\theta}$ 由 V 上的整全纯函数 θ 给出, 它满足

$$\theta(z+\lambda_\alpha)=\theta(z),\quad \theta(z+\lambda_{n+\alpha})=e^{-2\pi i z_\alpha-\pi i Z_{\alpha\alpha}}\cdot\theta(z)。$$

由第一个条件, 这样的函数 θ 对变量 $z_\alpha^*=e^{2\pi i\delta_\alpha^{-1}z_\alpha}$ 必须有幂级数展开; 我们可以写出,

$$(*)\qquad \begin{aligned}\theta(z) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l\cdot z_1^{*l_1}\cdots z_n^{*l_n}\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l\cdot e^{2\pi i\sum\limits_\alpha l_\alpha\delta_\alpha^{-1}z_\alpha}\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l\cdot e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}。\end{aligned}$$

第二组条件给出 θ 的系数 a_l 中间的递归关系; 因此得到,

$$\begin{aligned}\theta(z+\lambda_{n+\alpha}) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l\cdot e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}(z+\lambda_{n+\alpha})\rangle}\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l\cdot e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}\lambda_{n+\alpha}\rangle}\cdot e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}。\end{aligned}$$

但是上面的第一个条件断言,

$$\begin{aligned}\theta(z+\lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i z_\alpha-\pi i Z_{\alpha\alpha}}\cdot\theta(z)\\ &= e^{-2\pi i z_\alpha-\pi i Z_{\alpha\alpha}}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_{l+\Delta_\delta e_\alpha}\cdot e^{-\pi i Z_{\alpha\alpha}}\cdot e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}。\end{aligned}$$

比较这两个 $\theta(z+\lambda_{n+\alpha})$ 的 Fourier 展开, 我们得到

$$a_{l+\delta_\alpha e_\alpha}=e^{2\pi i\langle l,\Delta_\delta^{-1}\lambda_{n+\alpha}\rangle+\pi i Z_{\alpha\alpha}}\cdot a_l。$$

因此, θ 完全由系数

$$\{a_l\}_{l:0\leqslant l_\alpha<\delta_\alpha}$$

的选择所确定, 并且因此得到

$$h^0(M,\mathscr{O}(L))\leqslant\prod\delta_\alpha。$$

为了证明等号, 我们必须证明, 由系数 $\{a_l\}_{l:0\leqslant l_\alpha<\delta_\alpha}$ 的任意选择所确定的级数 $(*)$ 实际上是收敛的。现在, 我们可以写出

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \sum_{0\leqslant l_{0\alpha}<\delta_\alpha}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}a_{l_0+\Delta_\delta l}\cdot e^{2\pi i\langle l_0+\Delta_\delta l,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}\right)\\ &= \sum_{0\leqslant l_{0\alpha}<\delta_\alpha}e^{2\pi i\langle l_0,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}\cdot\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}a_{l_0+\Delta_\delta l}\cdot e^{2\pi i\langle l,z\rangle}\right)。\end{aligned}$$

设

$$(**)\qquad \theta_{l_0}(z)=e^{2\pi i\langle l_0,\Delta_\delta^{-1}z\rangle}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}a_{l_0+\Delta_\delta l}\cdot e^{2\pi i\langle l,z\rangle}$$

是由选择 $a_{l_0}=1$ 确定的级数, 并且递归关系如上; 由这些关系的线性, 我们得到, 一般 θ 函数的形式为

$$\theta(z)=\sum_{0\leqslant l_{0\alpha}<\delta_\alpha}a_{l_0}\theta_{l_0}(z),$$

并且因此充分证明了级数 $(**)$ 是收敛的。

为了方便, 设 $b_l=a_{l_0+\Delta_\delta l}$; 那么递归关系为

$$\begin{aligned}b_{l+e_\alpha} &= a_{l_0+\Delta_\delta l+\Delta_\delta e_\alpha}\\ &= e^{2\pi i\langle(l_0+\Delta_\delta l),\Delta_\delta^{-1}\lambda_{n+\alpha}\rangle+\pi iZ_{\alpha\alpha}}\cdot a_{l_0+\Delta_\delta l}\\ &= e^{2\pi i\langle l,\lambda_{n+\alpha}\rangle+2\pi i\langle l_0,\Delta_\delta^{-1}\lambda_{n+\alpha}\rangle+\pi iZ_{\alpha\alpha}}。\end{aligned}$$

我们可以通过设

$$b_l=e^{\pi i\langle l,Zl\rangle+2\pi i\langle\Delta_\delta^{-1}l_0,Zl\rangle}$$

计算出这些关系; 为了验证它, 因为 $Z={}^tZ$ 和 $Ze_\alpha=\lambda_{n+\alpha}$, 所以我们得到,

$$\begin{aligned}b_{l+e_\alpha} &= e^{\pi i\langle(l+e_\alpha),Z(l+e_\alpha)\rangle+2\pi i\langle\Delta_\delta^{-1}l_0,Z(l+e_\alpha)\rangle}\\ &= e^{\pi i\langle l,Zl\rangle+2\pi i\langle l,Ze_\alpha\rangle+2\pi i\langle e_\alpha,Ze_\alpha\rangle+2\pi i\langle\Delta_\delta^{-1}l_0,Zl\rangle+2\pi i\langle\Delta_\delta^{-1}l_0,Ze_\alpha\rangle}\\ &= e^{2\pi i\langle l,\lambda_{n+\alpha}\rangle+\pi iZ_{\alpha\alpha}+2\pi i\langle\Delta_\delta^{-1}l_0,\lambda_{n+\alpha}\rangle}b_i。\end{aligned}$$

因此, 得到的 b_l 的确是递归关系的解。

现在,

$$|b_l|=e^{-\pi\langle l,Yl\rangle-2\pi\langle\Delta_\delta^{-1}l_0,Yl\rangle},$$

其中, $Y=\mathrm{Im}Z$ 如上。但是, Y 是正定的, 并且因此对某些常数 $c'>0$ 得到

$$\langle l,Yl\rangle>c'\cdot\|l\|^2。$$

还有, 显然对某些常数 c'' 有

$$|\langle \Delta_\delta^{-1} l_0, Yl\rangle| < c'' \cdot \|l\|,$$

并且因此对某些常数 $c > 0$, 对足够大的 l, 我们得到

$$|b_l| < e^{-c\|l\|^2}。$$

因此, 级数 $(**)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中的紧致集合上一致收敛, 并且我们完成了证明。

特别注意, 如果 $c_1(L)$ 是 M 的主极化, 那么 $H^0(M, \mathscr{O}(L))$ 是一维的, 并且由对应于函数

$$\theta(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i\langle l, Zl\rangle} \cdot e^{2\pi i\langle l, z\rangle}$$

的截面 $\tilde{\theta}$ 生成, 它满足泛函方程

$$\begin{aligned} \theta(z, e_\alpha) &= \theta(z), \\ \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i(z_\alpha + Z_{\alpha\alpha}/2)} \cdot \theta(z), \end{aligned}$$

和

$$\theta(z) = \theta(-z)。$$

这个美妙的整函数称为主极化 Abel 簇 $(M, [\omega])$ 的 Riemann θ 函数。

还要注意, 因为 $h^0(M, \mathscr{O}(L)) = 1$, 所以除子 $\Theta = [\tilde{\theta}]$ 被 L 唯一确定, 并且因此除了一个平移外被上同调类 $[\omega]$ 确定; Θ 被称为极化 Abel 簇 $(M, [\omega])$ 的 *Riemann* θ 除子。

考虑下列构造对理解最后一个结果是有益的: 设 $\Lambda, \lambda, x, e, z, \delta$ 和 Z 如上。设 $\Lambda' \subset V$ 是由矢量

$$\lambda'_\alpha = \delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha, \quad \lambda'_{n+\alpha} = \lambda_{n+\alpha}$$

生成的格子; 设 $M' = V/\Lambda'$。因为 Λ 是 Λ' 中指标 $\Delta = \prod \delta_\alpha$ 的子格子, 所以投影映射

$$\pi' : M \to M'$$

把 M 表示为 M' 的 Δ 叶覆盖, 纸牌变换就是平移 $\{\tau_\mu\}_{\mu\in\Lambda'/\Lambda}$。

但是现在, 在基 $\{\lambda'_i\}$ 和 $\{e_\alpha\}$ 下, $\Lambda' \subset V$ 的周期矩阵就是

$$\Omega' = (I, Z)。$$

因此, 如果 $x'_1, \cdots, x'_{2n}$ 是对偶于 $\{\lambda'_j\}$ 的实坐标, 那么类

$$[\omega] = \left[\sum dx'_\alpha \wedge dx'_{n+\alpha}\right] = \left[\sum \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}\right]$$

是 M 的主极化。因为 L 除了平移外被它的陈类 $c_1(L) = [\omega]$ 所确定, 所以我们可以找到线丛 $L' \to M'$, 使得 $\pi'^* L' = L$。总之, , *如果 $L \to M = V/\Lambda$ 是 Abel 簇上任意正定线丛, 那么我们可以找到主极化线丛为 $L' \to M'$ 的一个 Abel 簇 M', 和使得 $\pi'^* L' = L$ 的一个有限映射 $\pi' : M \to M'$。*

相当明显, 对应于断言 1 的证明中定义的 θ 函数 θ_{l_0} 的 Δ 个截面 $\tilde{\theta}_{l_0}$, 除了一个乘子外, 是来自 $\pi' : M \to M'$ 的纸牌变换的所有的互相平移, 并且 $H^0(M', \mathscr{O}(L'))$ 的生成元 $\tilde{\theta}$ 为

$$\pi'^*\tilde{\theta} = \sum_{\lambda \in \Lambda'/\Lambda} \tau_\lambda^* \tilde{\theta}。$$

现在, 对主极化为 $c_1(L)$ 的线丛 L, 我们来证明断言 2; 想法是利用环面上的群的定律。设 $L \to M$ 是主极化的并且象最后一段一样都是归一化的。我们得到

$$H^0(M, \mathscr{O}(L^k)) = \{\theta \in \mathscr{O}(V) : \theta(z + e_\alpha) = \theta(z), \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) = e^{-2k\pi i(z_\alpha + Z_{\alpha\alpha}/2)}\theta(z)\}。$$

特别是, 如果 θ 是 (M, L) 的 Riemann θ 函数, 那么, 对每个 $\mu \in M$ 有

$$\Theta_\mu(z) = \theta(z + \mu)\theta(z - \mu) \in H^0(M, \mathscr{O}(L^2))。$$

现在, 如果 $z^* \in M$, 那么我们可以找到 $\mu \in M$, 使得 $\theta(z^* + \mu) \neq 0$ 和 $\theta(z^* - \mu) \neq 0$; 即, $\Theta_\mu(z^*) \neq 0$。因此, 线性系 $|L^2|$ 没有基点, 并且因此它给出映射 $\iota_{L^2} : M \to \mathbb{P}^N$。

为了搞清楚由线丛 L^3 给出的映射 $\iota_{L^3} : M \to \mathbb{P}^N$ 是一个嵌入, 设 $\theta_0, \cdots, \theta_N$ 是 $H^0(M, \mathscr{O}(L^3))$ 的一个基, 并且设

$$\mathscr{J}(z) = \begin{pmatrix} \theta_0(z) & \cdots & \theta_N(z) \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial z_1}(z) & \cdots & \frac{\partial \theta_N}{\partial z_1}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial z_n}(z) & \cdots & \frac{\partial \theta_N}{\partial z_n}(z) \end{pmatrix}。$$

我们将首先证明, $\mathscr{J}(z)$ 的秩是 $n+1$, 并且因此 ι_{L^3} 是一个浸入。设 $\theta(z)$ 是 Riemann θ 函数, 并且设

$$\Theta(z, \mu, \nu) = \theta(z + \mu)\theta(z + \nu)\theta(z - \mu - \nu)。$$

Θ 是三个变量 z, μ 和 ν 的全纯函数; 固定 μ 和 ν 后, $\Theta_{\mu,\nu}(z) = \Theta(z, \mu, \nu)$ 是 Λ^3 的整体截面。于是我们可以写出

$$\Theta(z, \mu, \nu) = c_0(\mu, \nu) \cdot \theta_0(z) + \cdots + c_N(\mu, \nu) \cdot \theta_N(z),$$

其中, c_i 对 μ 和 ν 是有明确定义的和全纯的。

现在, 假设对某些 $z^* \in M$, $\mathscr{J}(z^*)$ 的秩 $< n+1$, 即, 对 $0 \leqslant i \leqslant N$,

$$a_0\theta_i(z^*) = a_1\frac{\partial \theta_i}{\partial z_1}(z^*) + \cdots + a_n\frac{\partial \theta_i}{\partial z_n}(z^*)。$$

因此, 对所有 μ 和 ν 有

$$a_0\Theta(z^*, \mu, \nu) = a_1\frac{\partial \Theta}{\partial z_1}(z^*, \mu, \nu) + \cdots + a_n\frac{\partial \Theta}{\partial z_n}(z^*, \mu, \nu)。$$

如果我们定义整函数为

$$\varphi(z)=a_1\frac{\partial\log\theta}{\partial z_1}(z)+\cdots+a_n\frac{\partial\log\theta}{\partial z_n}(z),$$

那么对所有 μ,ν 有

$$\varphi(z^*+\mu)+\varphi(z^*+\nu)+\varphi(z^*-\mu-\nu)=\sum a_i\frac{\partial\log\Theta}{\partial z_i}(z^*,\mu,nu)$$

$$=\frac{1}{\Theta(z^*,\mu,\nu)}\sum a_i\frac{\partial\Theta}{\partial z_i}(z^*,\mu,\nu)=a_0。$$

现在, 对任意 μ, 我们可以找到 ν, 使得 $\varphi(z^*+\nu)\neq\infty$ 和 $\varphi(z^*-\mu-\nu)\neq\infty$, 即, 使得 $z^*+\nu$ 和 $z^*-\mu-\nu$ 都在 φ 的极除子之外; 因为 $\varphi(z^*+\mu)+\varphi(z^*+\nu)+\varphi(z^*-\mu-\nu)=a_0$, 所以 $\varphi(z^*+\mu)$ 是 μ 的整全纯函数。现在显然有 $\varphi(z+e_\alpha)=\varphi(z)$; 并且因为

$$\begin{aligned}\theta(z+\lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i(z_\alpha+Z_{\alpha\alpha}/2)}\theta(z),\\ \log\theta(z+\lambda_{n+\alpha}) &= -2\pi i\left(z_\alpha+\frac{Z_{\alpha\alpha}}{2}\right)+\log\theta(z),\end{aligned}$$

即,

$$\varphi(z+\lambda_{n+\alpha})=\varphi(z)-2\pi i\cdot a_\alpha。$$

因此, 对格子 Λ, 每个偏微商 $\partial\varphi/\partial z_i$ 是周期的, 因此在 $V\cong\mathbb{C}^n$ 中是有界的且从而是常数。因此, φ 必须是线性的; 写作

$$\varphi(z)=\sum_\alpha b_\alpha\cdot z_\alpha+c。$$

但是对所以 α 有 $\varphi(z+e_\alpha)=\varphi(z)\Rightarrow b_\alpha=0$; 因此 $\varphi(z+\lambda_{n+\alpha})=\varphi(z)=c$。于是, 对所有 α 有

$$\varphi(z+\lambda_{n+\alpha})-\varphi(z)=2\pi i\cdot a_\alpha\Rightarrow a_\alpha=0。$$

我们推导出推测的线性关系

$$a_0\theta_j(z^*)=\sum a_i\frac{\partial\theta_j}{\partial z_i}(z^*)\quad 对所有j$$

是平庸的, 并且 ι_{L^3} 是一个浸入。

还要通过类似的讨论证明, ι_{L^3} 是一对一的。假设存在 $z_1,z_2\in\mathbb{C}^n$, 使得对所有 i 有

$$\theta_i(z_1)=\rho\cdot\theta_i(z_2);$$

我们将证明 z_1 和 z_2 表示 M 上的相同点。从一般关系得到,

$$\Theta(z,\mu,\nu)=\sum_{i=0}^N c_i(\mu,\nu)\cdot\theta_i(z),$$

因此, 等价地得到, 在 μ 和 ν 中

$$\frac{\Theta(z_1,\mu,\nu)}{\Theta(z_2,\mu,\nu)}=\frac{\theta(z_1+\mu)\theta(z_1+\nu)\theta(z_1-\mu-\nu)}{\theta(z_2+\mu)\theta(z_2+\nu)\theta(z_1-\mu-\nu)}=\rho。$$

对任意 $\mu\in\mathbb{C}^n$, 我们可以找到 ν, 使得

$$\theta(z_1+\nu),\theta(z_1-\mu-\nu),\theta(z_2+\nu),\theta(z_2-\mu-\nu)$$

都不是零; 因此 $\theta(z_1+\mu)/\theta(z_2+\mu)$ 是 μ 的非零整函数。于是我们可以设

$$\psi(z)=\log\frac{\theta(z_1+z)}{\theta(z_2+z)},$$

并且得到一个整函数。由 θ 函数的泛函方程得到,

$$\begin{aligned}\psi(z+e_\alpha)&=\psi(z)+2\pi i b_\alpha, & b_\alpha\in\mathbb{Z}\\ \psi(z+\lambda_{n+\alpha})&=\psi(z)-2\pi i(z_1-z_2)_\alpha+2\pi i c_\alpha, & c_\alpha\in\mathbb{Z}。\end{aligned}$$

就象以前一样, 这表明 $\partial\psi/\partial z_i$ 对所有 i 是常数, 因此我们可以写出

$$\psi(z)=2\pi i\sum a_\beta\cdot z+d。$$

因此, $\psi(z+e_\alpha)=\psi(z)+2\pi i b_\alpha\Rightarrow a_\beta=b_\beta\in\mathbb{Z}$; 这依次表明,

$$\begin{aligned}\psi(z+\lambda_{n+\alpha})-\psi(z)&=2\pi i\sum a_\beta Z_{\alpha\beta}\\ \Rightarrow\qquad 2\pi i(z_1-z_2)_\alpha&=-2\pi i c_\alpha+2\pi i\sum a_\beta Z_{\alpha\beta}\\ \Rightarrow\qquad z_1-z_2&=-\sum c_\alpha\cdot e_\alpha+\sum a_\beta\lambda_{n+\beta},\end{aligned}$$

即, $z_1-z_2\in\Lambda$。

最后, 注意, 对任意正定线丛 $L\to M$, 我们可以如前构造一个 Abel 簇 M', 其中主极化线丛为 $L'\to M'$ 和有限映射为

$$\pi':M\to M',$$

使得

$$\pi'^*(L')=L。$$

因为 π' 处处不奇异, 所以上面的讨论应用到 L' 就证明了, ι_{L^3} 同样是浸入, 并且对 $\pi'(p)\neq\pi'(q)$ 的 p 或 q, $\iota_{L^3}(p)\neq\iota_{L^3}(q)$。$\iota_{L^3}$ 把 $\pi^{-1}(p)$ 中的点分离, 这一点可以直接从第319页 θ 函数的显形式看出。 证毕

超出曲线的第一种情况是主极化 Abel 曲面的嵌入

$$\iota_{L^3}:M\hookrightarrow\mathbb{P}^8。$$

作为一个特殊情形, 如果 $M=E_1\times E_2$ 是两条椭圆曲线的积, $L_1\to E_1$ 和 $L_2\to E_2$ 是次数为 1 的线丛, 并且 $\iota_{L_i^3}:E_i\to\mathbb{P}^2$ 是相应的嵌入, 那么 $L=\pi_1^*L_1\otimes\pi_2^*L_2$ 是主极化的, 并且 ι_{L^3} 就是应用到 $M=E_1\times E_2\hookrightarrow\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ 的 Segré 映射 $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^8$。

Abel 簇上的群结构

在结束复环面的讨论之前, 我们要对 Abel 簇上的群结构做几个评注。

任意复环面 $M = \mathbb{C}^n/\Lambda$ 是*复李群*——即, 有群结构的复流形, 其中的群运算是全纯的。反过来, 我们得到

命题: *任意连通紧致复李群 M 是一个复环面。*

证明: 我们首先证明, M 必须是可交换的。对每个 $g \in M$, 设 $\mathrm{Ad}(g)$ 是由

$$\mathrm{Ad}(g) : h \mapsto ghg^{-1}$$

给出的 M 的自同构。显然, 对所有 $g \in M$, 恒等元 e 是 $\mathrm{Ad}(g)$ 的固定点。

现在, 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是 $e \in M$ 周围的全纯坐标, 并且对每个 $g \in M$, 把 $\mathrm{Ad}(g)^* z_i$ 的幂级数展开写作

$$\mathrm{Ad}(g)^*(z_i) = \sum a_{i_1,\cdots,i_n}(g) z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}。$$

对每个指标 $(i_1, \cdots, i_n)$, 函数 $a_{i_1,\cdots,i_n}(g)$ 显然是 g 的全纯函数; 因为 M 是紧致和连通的, 所以 $a_{i_1,\cdots,i_n}(g)$ 是常数。因此,

$$\mathrm{Ad}(g)^*(z_i) = \mathrm{Ad}(e)^*(z_i) = z_i,$$

并且因此

$$\mathrm{Ad}(g)^* \equiv I,$$

即, M 是可交换的。

接下来, 对 M 在 e 处的任意切矢量 $v \in T'_e(M)$, 设 $\tilde{v}$ 是 M 上的矢量场, 定义为

$$\tilde{v}(g) = (t_g)_*(v),$$

其中, $t_g : M \to M$ 是由 g 得到的乘子; 显然, $\tilde{v}$ 是全纯的。设 $\varphi_{t,v} : M \to M$ 是 M 的内自同构, 它通过把矢量场 $\tilde{v}$ 积分到时间 t 而得到, 并且设

$$\pi : T'_e(M) \to M$$

是指数映射, 定义为

$$\pi(v) = \varphi_{1,v}(e)。$$

因为 M 是交换的, 所以 π 实际上是群同态。因此 M 是 $T'_e(M) \cong \mathbb{C}^n$ 除以离散子群的商, 这个子群必须是格子 Λ; 因为 M 是紧致的, 所以 Λ 的最大秩必须是 $2n$, 并且因此 $M = \mathbb{C}^n/\Lambda$ 是复环面。 证毕

注意, 如果 $M = \mathbb{C}^n/\Lambda, M' = \mathbb{C}^m/\Lambda'$ 是两个复环面, 并且 $f : M \to M'$ 是全纯映射, 那么, f 提升到一个映射

$$\tilde{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m。$$

于是我们得到, 在 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 各自的欧氏坐标 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 和 $w = (w_1, \cdots, w_m)$ 下, *Jacobi* 矩阵

$$\mathscr{J}_f = \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\right)$$

是 M 上有明确定义的整体全纯函数, 因此是常数。所以, $\tilde{f}$ 是仿射线性变换, 并且我们得到

命题: 复环面之间的任意全纯映射是来自平移的群同态。

Abel 簇是齐次代数簇——即, 它容许一个双全纯可迁群。其它齐次簇为 Grassmann 流形, 二次曲面等等。在这两种之间有一个重要的差别。在后一个例子中, 自同构可以取为射影变换——即, 对适当的嵌入 $M \subset \mathbb{P}^N$, 自同构群 $\mathrm{Aut}(M)$ 就是保持 M 固定的 $\mathbb{P}^N$ 的线性自同构群。另一方面:

定理: 如果 $M \subset \mathbb{P}^N$ 是 *Abel* 簇, 那么由 $\mathbb{P}^N$ 上的线性变换诱导的 M 的自同构群是有限的。

证明: 设 $L \to M$ 是 M 上的超平面丛。那么, 如果 $\varphi : M \to M$ 是由 $\mathbb{P}^N$ 的线性变换诱导的任意自同构, 那么显然有 $\varphi^* L = L$。但是 L 是正定的, 并且因此它只被 M 的有限平移群所保持不变。因此, 只需证明固定 L 和固定 M 中点 $p = \pi(0)$ 的自同构群 φ 是有限的。现在, 任意自同构提升为固定格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ 的线性变换 $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$; 还有, 因为 φ 把 L 变成它自己, 所以 $\tilde{\varphi}$ 必然关于由 $c_1(L) \in H^{1,1}(M) = V \otimes \overline{V}$ 给出的厄米内积是幺正的。特别是, $\tilde{\varphi}$ 把一个基下每个格子矢量 λ_i 变成同样长度的格子矢量。但是对每个 i 只能有有限个这样的格子矢量, 并且因此结果得证。 证毕

内在公式

用不依赖于坐标的方式表示 Abel 簇上的结果常常有很多便利, 我们现在将研究它及其几个应用。

假设 $V_{\mathbb{R}}$ 是包含整个格子 Λ 的偶维实矢量空间, 并且在复化 $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{R}$ 分解下得到

$$(*) \qquad V_{\mathbb{C}} = V \oplus \overline{V},$$

这给出了共轭子空间。于是, 在 $V_{\mathbb{C}}$ 中 Λ 的像投影到 V 中的整个格子上, 我们仍把它表示为 Λ; 并且

$$M = V/\Lambda$$

是复环面。我们将在下一段得到, 用这种方法, 每个复环面随着 $V_{\mathbb{R}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 而出现。

自然同构

$$\Lambda \cong H_1(M, \mathbb{Z}), \qquad V^* \cong H^0(M, \Omega^1)$$

已经被注意到。如果 $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, 那么由 Kodaira–Serre 和 Poincaré 对偶得到,

$$V \cong H^{n-1,n}(M), \qquad \Lambda \cong H^{2n-1}(M, \mathbb{Z})。$$

因此, $V_{\mathbb{R}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 正则同构于 $H^{2n-1}(M, \mathbb{R})$, 并且 $(*)$ 是 Hodge 分解

$$H^{2n-1}(M, \mathbb{C}) = H^{n-1,n}(M) \oplus \overline{H^{n-1,n}(M)}。$$

按照前一节的命题得到, 任意全纯映射

$$\varphi : \frac{V}{\Lambda} \to \frac{V'}{\Lambda'}$$

由一个仿射线性映射 $V \to V'$ 给出。为了搞清这个映射是什么, 我们把 φ 与平移复合起来使得 $\varphi(e) = e'$, 并且设

$$\Phi : \Lambda \to \Lambda'$$

表示同调上的诱导映射。因为 φ^* 保持 Hodge 分解, 所以我们看到,

$$\Phi : V \to V',$$

并且它是诱导 φ 的线性映射。

极化存在性的 Riemann 条件可以表述如下: $H^2(M, \mathbb{Z})$ 中的类由双线性形式

$$Q : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \to \mathbb{Z}, \qquad Q(\lambda, \lambda') = -Q(\lambda', \lambda)$$

给出。把 $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ 与 $V \oplus \overline{V}$ 等价后, 双线性关系为

$$\begin{aligned} Q(v, v') = 0, &\qquad v, v' \in V, \\ -\sqrt{-1}Q(v, \overline{v}) > 0, &\qquad 0 \neq v \in V。\end{aligned}$$

例如, 如果 S 是紧致 Riemann 曲面, 其 Jacobi 簇为

$$\mathscr{J}(S) = \frac{H^{0,1}(S)}{H^1(S, \mathbb{Z})},$$

那么, 由除子 Θ 给出的主极化就是由杯积

$$H^1(S, \mathbb{Z}) \otimes H^1(S, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

给出的主极化, 由 Poincaré 对偶得到它是幺模的。一般地, 如果 Q 是基本除子 $\delta_1, \cdots, \delta_n$, 那么, $\Delta = \delta_1 \cdot \cdots \cdot \delta_n$ 称为 Q 的*Pfaff* 式, 并且

$$\det Q = \Delta^2。$$

我们将利用这个内在公式来构造 *Poincaré* 线丛

$$P \to M \times \hat{M},$$

其中, $\hat{M} = \mathrm{Pic}(M)$ 是对偶于 M 的复环面。回想一下, $\mathrm{Pic}^0(M)$ 被定义为第一陈类为零的全纯线丛的群。由指数层序列的上同调序列, 我们得到一个自然等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}^0(M) &\cong \frac{H^1(M,\mathscr{O})}{H^1(M,\mathbb{Z})}\\ &\cong \frac{\overline{V}^*}{\Lambda^*}, \qquad \Lambda^* = \mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z}),\end{aligned}$$

并且用 $P_\xi \to M$ 表述对应于 $\xi \in \mathrm{Pic}^0(M)$ 的线丛。

引理: *存在一个唯一的全纯线丛*

$$P \to M \times \hat{M},$$

称之为 **Poincaré 线丛**, *它在 $e \times \hat{M}$ 上是平庸的, 并且满足*

$$P|_{M\times\{\xi\}} \cong P_\xi\text{。}$$

证明: 利用 $\hat{M} = H^{0,1}(M)/H^1(M,\mathbb{Z})$, 指数层序列的上同调序列和 Künneth 公式给出

$$\begin{array}{ccccc} H^1(M\times\hat{M},\mathscr{O}) \to & H^1(M\times\hat{M},\mathscr{O}^*) & \to H^2(M\times\hat{M},\mathbb{Z}) \to & & H^2(M,\times\hat{M},\mathscr{O})\text{。}\\ \uparrow & & \uparrow & & \\ H^1(M,\mathscr{O})\oplus H^1(\hat{M},\mathscr{O}) & & H^1(M,\mathbb{Z})\otimes H^1(\hat{M},\mathbb{Z}) & & \\ & & \wr\!\wr\uparrow & & \\ & & \mathrm{Hom}(H^1(M,\mathbb{Z}),H^1(M,\mathbb{Z})) & & \end{array}$$

现在, 因为恒等元 $I \in \mathrm{Hom}(H^1(M,\mathbb{Z}),H^1(M,\mathbb{Z}))$ 保持 $H^1(M,\mathbb{C})$ 上的 Hodge 分解, 所以它的 Hodge 型为 $(1,1)$。那么, 由 $(1,1)$ 类上的 Lefschetz 定理, 我们得到 $c_1(P) = I$ 的一个全纯线丛 $P \to M \times \hat{M}$。限制 $P|_{M\times\{\xi\}}$ 的陈类为 0, 并且因此对某些全纯映射

$$\varphi : \hat{M} \to \mathrm{Pic}^0(M)$$

就是 $P_{\varphi(\xi)}$。归一化使得 $\varphi(e) = \hat{e}$——它是通过 P 乘以 $\xi_0 = \varphi(e)$ 的 $\pi_1^* P_{-\xi_0}$ 而得到——通过构造, 诱导同调映射就是恒等元。于是, φ 也是恒等元, 并且它证明了 Poincaré 线丛的存在性。

如果 P, P' 是两个这样的线丛, 那么 $Q = P^* \otimes P'$ 有这样的性质:

$$Q|M\times\{\xi\} \cong M\times\mathbb{C}; \qquad Q|\{e\}\times\hat{M} \cong \hat{M}\times\mathbb{C}\text{。}$$

用 ψ 表示第二个平庸化, 并且设 $\sigma(\lambda,\xi) \in Q_{(\lambda,\xi)}$ 是 $Q|_{M\times\{\xi\}}$ 的唯一截面——它在 (e,ξ) 处的值为 $\psi^{-1}(1)$。于是, σ 是 Q 的不等于零的全纯截面, 因此它必须是平庸线丛。 证毕

对正定线丛 $L \to M$, 我们设在 $M \times \hat{M}$ 上有 $L \otimes P = \pi_1^* L \otimes P$, 那么,

$$\begin{aligned} L\otimes P|_{M\times\{\xi\}} &\cong L\otimes P_\xi\\ &= L_\xi,\end{aligned}$$

其中最后一步是定义。利用第三章第五节关于第二类微分的结果, 我们将证明

命题: 对每个 $\xi \in \hat{M}$, 存在 Δ 个截面 $\theta_j(\lambda,\xi) \in H^0(M\times\hat{M},\mathscr{O}(L\otimes P))$, 它诱导 $H^0(M,\mathscr{O}(L_\xi))$ 的一个基。

这个证明来自于由

$$\varphi_L(\lambda) = \pi_\lambda^* L \otimes L^*$$

定义的映射

$$\varphi_L : M \to \hat{M}$$

的一些初步结果, 它们在前一节已经讨论过。因为 $\varphi_L(e) = \hat{e}$, 所以按照一般的评注, φ_L 由下列诱导同调映射唯一确定:

$$\begin{aligned} \Phi_L \ &: \ \Lambda \to \Lambda^* \\ &: \ H^{2n-1}(M,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^{2n-1}(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \text{。} \end{aligned}$$

我们将计算 Φ_L, 因此给出 φ_L 是一个次数为 Δ^2 的同源映射——即有限叶覆盖映射——这个事实的另一个证明。

为此, 我们考虑由

$$m(\lambda',\lambda) = \lambda' + \lambda$$

给出的群定律

$$m : M \times M \to M\text{。}$$

由构造得到

$$(*) \qquad \varphi_L(\lambda) = \pi_1^* L^* \otimes m^* L|_{M\times\{\lambda\}}\text{。}$$

如果 $x_1,\cdots,x_{2n}$ 是 $V_\mathbb{R}$ 上的实坐标, 使得 $L \to M$ 的陈类是

$$\omega = \sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

那么, 利用 $M\times M$ 上作为对应坐标的 (u_α, v_β) 得到,

$$m^*\omega = \sum_\alpha \delta_\alpha (du_\alpha + dv_\alpha) \wedge (du_{n+\alpha} + dv_{n+\alpha})\text{。}$$

如果 $\eta \in H^{2n-1}(M,\mathbb{Z})$, 那么我们设 $\eta_1 \in H^{2n-1}(M\times M,\mathbb{Z})$ 是类 $\pi_1^*\eta$, 并且对 η_2 类似设定。从 $(*)$ 我们容易推导出, Φ_L 由 $H^{2n-1}(M,\mathbb{Z})$ 上的双线性形式给出, 其定义为

$$\Phi_L(\eta,\eta') = \int_{M\times M} m^*\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2'\text{。}$$

清楚地计算后, 我们写出

$$\begin{aligned} \eta &= \sum (-1)^{i-1} \eta_i dx_i \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{2n}, \\ \eta' &= \sum (-1)^{j-1} \eta_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_{2n}, \end{aligned}$$

并且于是通过 $m^*\omega$ 和 Φ_L 的公式得到,

$$\Phi_L(\eta,\eta')=\sum_\alpha \delta_\alpha(\eta_\alpha\eta'_{n+\alpha}-\eta_{n+\alpha}\eta'_\alpha)。$$

这证明了前面的断言:

$\varphi_L: M\to\hat{M}$ 是次数为 Δ^2 的同源映射, 或者等价地, 线丛 $L\to M$ 正好在下列平移群下保持固定:

$$\mathbb{Z}\{\delta_\alpha^{-1}x_\alpha,\delta_\alpha^{-1}x_{n+\alpha}\}。$$

回到命题的证明, 方程

$$\xi=\varphi_L(\lambda)$$

有 Δ^2 个解 $\lambda_\alpha(\xi)$。如果 $\theta(z)\in\mathscr{O}(V)$ 是一个 θ 函数, 它给出 $L\to M$ 的一个截面, 那么 $\theta_\lambda(z)=\theta(z+\lambda)$ 给出 $\tau_\lambda^*L=L\otimes L_{\varphi_L(\lambda)}$ 的一个截面。现在, 如果 $\rho: M\times M\to M\times\hat{M}$ 是由 $\rho(\lambda',\lambda)=(\lambda',\varphi_L(\lambda))$ 定义的同源映射, 那么 $\theta(z,\lambda)=\theta(z+\lambda)$ 给出

$$\pi_1^*L\otimes\rho^*P=\rho^*(L\otimes P)\to M\times\hat{M}$$

的一个截面。因为 $\theta(z+\lambda_a(\xi))=\theta(z+\lambda_b(\xi))$, 所以这个截面从截面 $\theta(z,\xi)\in H^0(M\times\hat{M},\mathscr{O}(L\otimes P))$ 诱导出来。用这种方法, 我们可以构造命题所要求的截面。 证毕

我们最后讨论一些复环面, 它们内在地伴随于一个任意紧致 Kähler 流形 M。回想一下来自第二章第一节的 Hodge 分解

$$H^{2q-1}(V,\mathbb{C})=\bigoplus_{r+r=2q-1}H^{r,s}(M),$$

对 $1\leqslant q\leqslant\dim M$, 我们设

$$V_q=H^{q-1,q}(M)\oplus\cdots\oplus H^{0,2q-1}(M)。$$

于是,

$$H^{2q+1}(M,\mathbb{C})=V_q\oplus\overline{V}_q,$$

而且, 如果我们设 Λ_q 表示 $H^{2q+1}(M,\mathbb{Z})\to V_q$ 的像, 那么第 q 个中间 *Jacobi* 簇定义为复环面

$$\mathscr{J}_q(M)=\frac{V_q}{\Lambda_q}。$$

我们将主要讨论极端情形 $q=1$ 和 $q=n$。

当 $q=1$ 时, 我们找到 Picard 簇

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_1(M)&=\frac{H^{0,1}(M)}{H^1(M,\mathbb{Z})}\\&=\mathrm{Pic}^0(M)。\end{aligned}$$

对 $q=n$, 我们得到*Albanse* 簇

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_n(M) &= \frac{H^{n-1,n}(M)}{H^{2n-1}(M,\mathbb{Z})}\\ &\cong \frac{H^0(M,\Omega^1)^*}{H_1(M,\mathbb{Z})}\\ &= \mathrm{Alb}(M),\end{aligned}$$

其中, 最后一步是定义。现在, 如我们在 Abel 定理讨论中同样的理由, 选定基点 $p_0\in M$ 和基 $\omega_1,\cdots,\omega_q\in H^0(M,\Omega^1)$ 后, 由

$$\mu(p)=\left(\int_{p_0}^q\omega_1,\cdots,\int_{p_0}^q\omega_q\right)$$

给出的映射

$$\mu: M\to \mathrm{Alb}(M)$$

有明确的定义且是全纯的。通过构造, 诱导映射

$$\begin{aligned}\mu_* &: \frac{H_1(M,\mathbb{Z})}{\text{挠率}}\to H_1(\mathrm{Alb}(M),\mathbb{Z}),\\ \mu^* &: H^0(\mathrm{Alb}(M),\Omega^1)\to H^0(M,\Omega^1)\end{aligned}$$

是同构。利用内在公式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}^0(\mathrm{Alb}(M)) &= \frac{H^{0,1}(M)}{H^1(M,\mathbb{Z})}\\ &= \mathrm{Pic}^0(M),\\ \mathrm{Alb}(\mathrm{Pic}^0(M)) &= \frac{H^{n-1,n}(M)}{H^{2n-1}(M,\mathbb{Z})}\\ &= \mathrm{Alb}(M)。\end{aligned}$$

特别是, 在一种自然的方式中, $\mathrm{Alb}(M)$ 和 $\mathrm{Pic}^0(M)$ 是对偶复环面。

现在假设 $\omega\in H^{1,1}(M)\cap H^2(M,\mathbb{Z})$ 是正定线丛的陈类。于是, 由 Hodge–Riemann 双线性关系, 由

$$Q(\eta,\eta')=\int_M\omega^{n-1}\wedge\eta\wedge\eta'$$

给出的双线性形式

$$Q:\Lambda_1\otimes\Lambda_1\to\mathbb{Z}$$

诱导了 $\mathrm{Pic}^0(M)$ 上的一个极化, 通过前面的讨论, 它诱导了对偶环面 $\mathrm{Alb}(M)$ 上的一个极化。对正定线丛 $L\to\mathrm{Alb}(M)$ 和 Poincaré 丛 $P\to\mathrm{Alb}(M)\times\mathrm{Pic}^0(\mathrm{Alb}(M))$, 我们设 $L_\xi=L\otimes P|_{\mathrm{Alb}(M)\times\{\xi\}}$, 其中, $\xi=\mathrm{Pic}^0(\mathrm{Alb}(M))$。那么, 对每个截面 $\theta\in H^0(\mathrm{Alb}(M),L)$, 我们已经构造了 $\theta_\xi\in H^0(\mathrm{Alb}(M),L_\xi)$。在正则映射

$$\mu: M\to\mathrm{Alb}(M)$$

下把它拖回和做前面的等价 $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{Alb}(M)) \cong \mathrm{Pic}^0(M)$ 后, 我们推导出

存在全纯线丛 $L_\xi \to M$, 它可用 $\xi \in \mathrm{Pic}^0(M)$ 参数化, 满足 $L_\xi \otimes L_\xi^* = \xi$, 并且全纯截面 $\theta_\xi \in H^0(M, \mathscr{O}(L_\xi))$ 全纯地依赖于 ξ。

如果 $q = \frac{1}{2}b_1(M)$, 那么设 $D_\xi = (\theta_\xi)$ 后, 这最后一个断言经典上陈述为: 在 M 上存在一个 ∞^q 线性不等价除子族 D_ξ。

7. 曲线及其 Jacobi 簇

预备知识

现在, 设 S 是亏格为 g 的紧致 Riemann 曲面。选择 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 的一个标准基 $\{a_1,\cdots,a_g, b_1,\cdots,b_g\}$, 使得

$$^{\#}(a_\alpha \cdot a_\beta) = {}^{\#}(b_\alpha \cdot b_\beta) = 0, \qquad {}^{\#}(a_\alpha \cdot b_\beta) = \delta_{\alpha\beta};$$

依次设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 是 $H^0(S,\Omega^1)$ 的基, 它对于 $\{a_\alpha, b_\alpha\}$ 是归一化的, 即, 使得

$$\int_{a_\alpha} \omega_\beta = \delta_{\alpha\beta}。$$

回想一下, S 的 Jacobi 簇 $\mathscr{J}(S)$ 由 $\mathscr{J}(S) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ 给出, 其中 Λ 是由矢量

$$\begin{aligned} e_\alpha = \lambda_\alpha &= \left(\int_{a_\alpha} \omega_1, \cdots, \int_{a_\alpha} \omega_g\right) \\ \lambda_{g+\alpha} &= \left(\int_{b_\alpha} \omega_1, \cdots, \int_{b_\alpha} \omega_g\right) \end{aligned}$$

生成的格子。由 Riemann 双线性关系, $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ 的周期矩阵 Ω 的形式为

$$\Omega = (I, Z),$$

其中, $Z = {}^tZ$ 和 $Y = \mathrm{Im}Z > 0$; 因此, 如果我们设 $x_1,\cdots,x_{2g}$ 是对偶于实基 $\{\lambda_i\}$ 的 $\mathbb{C}^g$ 上的实坐标, 那么微分形式

$$\omega = \sum_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}$$

表示 $\mathscr{J}(S) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ 的主极化。用 $\mathbb{C}^g$ 上标准复坐标 $z = (z_1,\cdots,z_g)$ 的方式, 我们还可以写出

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum Y_{\alpha\beta}^{-1} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

其中 $Y = \mathrm{Im}Z$ 如上。

(*注记*: 由于 Riemann 曲面的 Jacobi 簇总是主极化的, 所以, 在如上归一化后, 我们将把 λ_α 写作 e_α 并且把 $\lambda_{n+\alpha}$ 写作

$$Z_\alpha = (Z_{\alpha_1},\cdots,Z_{\alpha g}) = \left(\int_{b_\alpha} \omega_1, \cdots, \int_{b_\alpha} \omega_g\right)。$$

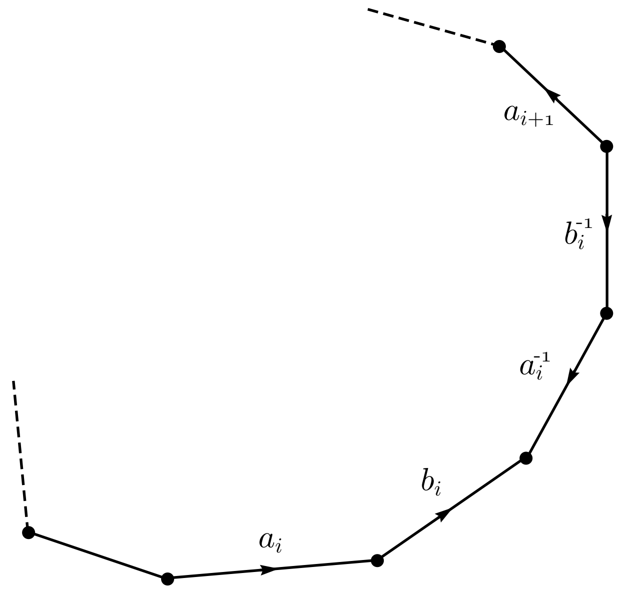


Figure 14

设 L 是 $\mathscr{J}(S)$ 上陈类为 $[\omega]$ 的线丛, 平移它使得 L 的整体截面 $\tilde{\theta}$ 用 Riemann θ 函数来表示, 它满足

$$\theta(z+e_\alpha)=\theta(z), \quad \theta(z+Z_\alpha)=e^{-2\pi i(Z_\alpha+Z_{\alpha\alpha}/2)}\theta(z);$$

设 $\Theta\subset\mathscr{J}(S)$ 是截面 $\tilde{\theta}$ 的除子。

现在, 明确选择一个基点 $z_0\in S$, 并且设 $\mu:S\to\mathscr{J}(S)$ 是由

$$\mu(z)=\left(\int_{z_0}^{z}\omega_1,\cdots,\int_{z_0}^{z}\omega_g\right)$$

给出的映射。我们首先计算曲线 $\mu(S)\subset\mathscr{J}(S)$ 与除子 Θ 的相交数目; 为此, 我们直接计算 S 上 μ^*L 的截面 $\mu^*\tilde{\theta}$ 的零点。假定闭链 a_α,b_α 除了公共基点外不相交, 并且象在本章第二节中那样, 把 S 表示为平面中的多边形 Δ, 它的边依次对应于闭链 $a_1,b_1,a_1^{-1},b_1^{-1}$ 等等。(见图14。) 于是, 如果 $\tilde{\mu}:\Delta\to\mathbb{C}^g$ 是 μ 的一个提升——由 Δ 中从 z_0 到 z 的积分给出, 并且 $\theta\in\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$ 是上面的 Riemann θ 函数, 那么我们得到,

$$\tilde{\mu}^*\theta\text{的零点数目}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}d\log\theta(\mu(z))。$$

为了计算这个积分, 我们把 $\partial\Delta$ 中边 a_β 和 a_β^{-1}, b_β^{-1} 和 b_β^{-1} 的贡献一起考虑。如果 z,z^* 分别是 a_β 和 a_β^{-1} 上的对应点, 那么我们得到,

$$\tilde{\mu}_\alpha(z^*)-\tilde{\mu}_\alpha(z)=\int_z^{z^*}\omega_\alpha=\int_z^{p_0}\omega_\alpha+\int_{b_\beta}\omega_\alpha+\int_{p_0}^{z^*}\omega_\alpha=\int_{b_\beta}\omega_a=Z_{\beta\alpha},$$

即,

$$\tilde{\mu}(z^*)=\tilde{\mu}(z)+Z_\beta。$$

因此,

$$\theta(\tilde{\mu}(z^*)) = e^{-2\pi i(\tilde{\mu}_\beta(z)+Z_{\beta\beta}/2)}\theta(\tilde{\mu}(z)),$$

所以,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a_\beta} d\log\theta(\tilde{\mu}(z)) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \quad \int_{a_\beta^{-1}} \quad d\log\theta(\tilde{\mu}(z)) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a_\beta^{-1}} d\log e^{-2\pi i(\tilde{\mu}(z)\beta+Z_{\beta\beta}/2)} \\ &= \int_{a_\beta} d\tilde{\mu}(z)_\beta \\ &= \int_{a_\beta} \omega_\beta = 1。\end{aligned}$$

类似地, 我们得到, 对 b_β, b_β^{-1} 上的对应点 z, z^*,

$$\tilde{\mu}(z^*) = \tilde{\mu}(z) - e_\beta,$$

因此, $\theta(\tilde{\mu}(z^*)) = \theta(\tilde{\mu}(z))$ 和

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\beta} d\log\theta(\tilde{\mu}(z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\beta^{-1}} d\log\theta(\tilde{\mu}(z)) = 0。$$

把 Δ 的所有边的贡献加起来, 我们得到,

$$\deg\mu^* L = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta} d\log\theta(\tilde{\mu}(z)) = g。$$

注意, 在本计算过程中我们假设了在 S 上 $\tilde{\mu}^*\theta \not\equiv 0$; 如果不这样, 我们不取 L 而取适当 $\lambda \in \Gamma^n$ 的平移 $L_\lambda = \tau_\lambda^* L$ 和相应的截面 $\theta_\lambda(z) = \theta(z-\lambda) \in H^0(\mathscr{J}(S), \mathscr{O}(L_\lambda))$。

计算 $\deg\mu^* L$ 的另一种方法是拓扑的:

$$\deg\mu^* L = \int_S c_1(\mu^* L) = \int_S \mu^* c_1(L) = \int_S \mu^*\left(\sum_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}\right)。$$

现在, $\mu_*(a_\alpha) = \lambda_\alpha, \mu_*(b_\alpha) = \lambda_{g+\alpha}$, 并且因此

$$\begin{aligned}\int_{a_\beta} \mu^* dx_\alpha &= \int_{\mu(a_\beta)} dx_\alpha = \delta_{\alpha\beta}; \\ \int_{b_\beta} \mu^* dx_\alpha &= \int_{\mu(b_\beta)} dx_\alpha = 0。\end{aligned}$$

因此我们得到, $[\mu^* dx_\alpha]$ Poincaré 对偶于闭链 $-b$, 并且 $[\mu^* dx_{n+\alpha}]$ 对偶于 $+a_\alpha$。那么,

$$\int_S \mu^*(dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}) = {}^\#(-b_\alpha \cdot a_\alpha) = 1,$$

因此,

$$\deg \mu^*(L) = \int_S \mu^* \left(\sum dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha} \right) = g。$$

现在, 设 $\Theta = (\theta)$ 表示线丛 L 的除子, 并且 $\Theta_\lambda = \Theta + \lambda = (\theta_\lambda)$ 表示平移丛 $L_\lambda = \tau_\lambda^* L$ 的除子, 其中, $\theta_\lambda(z) = \theta(z - \lambda)$。因为 $c_1(L_\lambda) = c_1(L)$, 所以由上面最后一个计算我们已经证明了, 对任意 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$, 或者

1. $\mu(S) \subset \Theta_\lambda$; 或者
2. $\mu(S)$ 与 Θ_λ 正好相交于 g 个点——多重数考虑在内。

对使得 $\mu(S) \not\subset \Theta_\lambda$ 的 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$, 写出除子为

$$(\mu^* \theta_\lambda) = z_1(\lambda) + \cdots + z_g(\lambda)。$$

现在, 由 Abel 和 Jacobi 定理知道, 点 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$ 表示 S 上次数为 0 的除子的线性等价类。实际上, 它表明, 除了一个常数 κ 外, λ 就是除子 $\sum z_i(\lambda) - g \cdot z_0$ 的类。我们把它表示为

引理: 对适当的陈述 $\kappa \in \mathscr{J}(S)$, 对所有 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$ 有

$$\sum_{i=1}^{g} \mu(z_i(\lambda)) + \kappa = \lambda$$

使得 $\mu(S) \not\subset \Theta_\lambda$。

注意, 这个引理对 Jacobi 反演问题给出了我们约定的显式解, 至少对一般的 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$ 使得曲线 $\mu(S)$ 不在 Θ_λ 上。

证明: 把 S 再表示为平面上的多边形 Δ, 其中 $\tilde{\mu} : \Delta \to \mathbb{C}^g$ 是 μ 的相应提升。 $\tilde{\mu}^* \theta_\lambda$ 在点 $z_i(\lambda)$ 处恰好等于零, 并且因此由留数定理得到,

$$\sum_i \tilde{\mu}_\alpha(z_i(\lambda)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \tilde{\mu}_\alpha(z) \cdot d \log \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z))。$$

通过考虑 $\partial\Delta$ 的边 a_β, a_β^{-1} 上的对应点 z, z^*, 我们如前计算这个积分。因为

$$\tilde{\mu}_\alpha(z^*) = \tilde{\mu}_\alpha(z) + Z_{\alpha\beta},$$

所以 θ 函数的泛函方程给出

$$\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z^*)) = e^{-2\pi(\tilde{\mu}_\beta(z) + Z_{\beta\beta}/2 - \lambda_\beta)} \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)),$$

由此得到

$$d \log \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z^*)) = d \log \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) - 2\pi\sqrt{-1} \cdot \omega_\beta(z)。$$

因此,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int_{a_\beta} \tilde{\mu}_\alpha(z) d \log \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) + \int_{a_\beta^{-1}} \tilde{\mu}_\alpha(z) d \log \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) \right)$$

$$= -\frac{Z_{\alpha\beta}}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a_\beta} d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) + Z_{\alpha\beta}\int_{a_\beta}\omega_\beta(z) + \int_{a_\beta}\tilde{\mu}_\alpha(z)\omega_b(z)。$$

表达式的最后两项不依赖于 λ 并且因此可吸收到常数 κ 中。至于第一项, 如果 z_1 和 z_2 是弧 a_β 的端点, 那么 $\tilde{\mu}(z_2) = \tilde{\mu}(z_1) \pm e_\beta$; 因此 $\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z_1)) = \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z_2))$ 并且

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{a_\beta} d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) \in \mathbb{Z}。$$

因此第一项同样必须是常数并且可以被 κ 吸收。现在, 如果 z 和 z^* 是 b_β 和 b_β^{-1} 的对应点, 那么我们得到,

$$\tilde{\mu}(z^*) = \tilde{\mu}(z) - e_\beta, \quad \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z^*)) = \theta_\lambda(\tilde{\mu}(z));$$

所以,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_{b_\beta}\tilde{\mu}_\alpha(z)d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) + \int_{b_\beta^{-1}}\tilde{\mu}_\alpha(z)d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z))\right)$$

$$= \frac{\delta_{a\beta}}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_\beta} d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z))。$$

再次, 如果 z_1 和 z_2 是 b_β 的端点, 我们得到 $\tilde{\mu}(z_2) = \tilde{\mu}(z_1) + Z_\beta$; 因此,

$$\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z_2)) = e^{-2\pi i(\tilde{\mu}_\beta(z) - \lambda_\beta + Z_{\beta\beta}/2)}\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z_1)),$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_\beta} d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) - \lambda_\beta \equiv \tilde{\mu}_\beta(z) + \frac{Z_{\beta\beta}}{2} \qquad (\mathrm{mod}\mathbb{Z})。$$

右边的表达式不依赖于 λ; 因此左边的表达式必须是常数, 并且可以吸收到 κ_α 中。把所有边的贡献加起来, 我们最后端点

$$\sum_i \tilde{\mu}_\alpha(z_i(\lambda)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\tilde{\mu}_\alpha(z)d\log\theta_\lambda(\tilde{\mu}(z)) = \lambda_\alpha + \kappa_\alpha。$$

证毕

从我们对 Riemann 定理的讨论, 我们可以确定常数 κ 并且当 $\mu(S) \subset \Theta_\lambda$ 时正好完全确定它。

Riemann 定理

我们可以用最后的结果来得到 θ 的除子 Θ 的几何描写。把我们的记号稍微改变一下是方便的, 用

$$D = p_1 + \cdots + p_d \in S^{(d)}$$

来表示 d 次有效除子, 用 z_i 表示 p_i 周围的局域坐标。一旦我们选定了 z_i, 我们可以用

$$\omega_\alpha(p) = \Omega_\alpha(p) \cdot dz_i$$

来定义 p_i 周围的函数; Ω_α 是我们前面写作 $\omega_\alpha(p)/dz_i$ 的函数。

如前, 我们由

$$\begin{aligned}\mu(p_1+\cdots p_d) &= \mu(p_1)+\cdots+\mu(p_d)\\ &= \left(\sum_i\int_{p_0}^{p_i}\omega,\cdots\sum_i\int_{p_0}^{p_i}\omega\right)\end{aligned}$$

来定义

$$\mu: S^{(d)}\to \mathscr{J}(S)。$$

点 p_i 不同的点 $D=p_1+\cdots+p_d$ 处, 在 $S^{(d)}$ 上的坐标 $z_1,\cdots,z_d$ 下, 映射 μ 的 Jacobi 矩阵由

$$\mathscr{J}(\mu)=\begin{pmatrix}\Omega_1(p_1) & \cdots & \Omega_g(p_1)\\ \vdots & & \vdots\\ \Omega_1(p_d) & \cdots & \Omega_g(p_d)\end{pmatrix}$$

给出。当点 p_i 在 S 的典范曲线上线性独立时, 这个矩阵有最大秩; 因为只要 $d\leqslant g$ 一般就是如此,所以对 $d\leqslant g$, 像

$$W_d=\mu(S^{(d)})$$

是 d 维解析子簇, 并且因为 μ 的纤维是线性空间, 所以映射 μ 是一对一的。这个映射的几何——特别是它与 S 上特殊线性系的关系——将在下面两小节讨论。

我们有伴随于 S 的 Jacobi 簇 $\mathscr{J}(S)$ 的两个除子, 除了平移外它们的唯一的: 线丛 $L\to\mathscr{J}(S)$ 上的除子 Θ——它的陈类由 $H_1(S,\mathbb{Z})\cong H_1(\mathscr{J}(S),\mathbb{Z})$ 上的相交形式给出, 和在 μ 下 $S^{(g-1)}$ 的像 W_{g-1}。这些除子的第一个完全用 $\mathscr{J}(S)$ 和 $[\omega]$ 的线性代数的方式定义, 而第二个直接包含 S 的几何和 μ。因此, 根本上重要的是

Riemann 定理:

$$\Theta=W_{g-1}+\kappa,$$

其中 κ 是出现在最后一个引理中的常数。

证明: 我们首先证明 $W_{g-1}\subset\Theta_{-\kappa}$。为此, 设 $D=p_1+\cdots+p_g\in S^{(g)}$ 是一般除子, 使得点 p_i 都不相同, $\mu: S^{(g)}\to\mathscr{J}(S)$ 在 D 处是一对一的, 并且 $\mu(S)\not\subset\Theta_{\kappa+\mu(D)}$。设

$$\lambda=\mu(D)+\kappa,$$

使得由前面的引理得到,

$$\Theta_\lambda\cap\mu(S)=\mu(p_1)+\cdots+\mu(p_g)。$$

现在——这是一个关键步骤——我们已经得到, $\theta(\mu)=\theta(-\mu)$; 因此, 对 $i=g$ 利用 $\theta_\lambda(\mu(p_i))=0$ 后得到,

$$\theta(\mu(p_1)+\cdots+\mu(p_{g-1})+\kappa)=\theta(\lambda-\mu(p_g))=\theta_\lambda(\mu(p_g))=0,$$

即,

$$\theta_{-\kappa}(\mu(p_1)+\cdots+\mu(p_{g-1}))=0。$$

因此, 在 $S^{(g-1)}$ 中的开集中, $\mu^*\theta_{-\kappa}$ 等于零, 因此在所有 $S^{(g-1)}$ 中等于零, 并且我们得到 $W_{g-1}\subset\Theta_{-\kappa}$。

现在, 从第一章第一节我们可以写出

$$\Theta_{-\kappa}=a\cdot W_{g-1}+\Theta',$$

其中 $a>0\in\mathbb{Z}$ 和 Θ' 是 $\mathscr{J}(S)$ 上的有效除子。我们首先要证明, $a=1$, 并且因此 $\Theta'=0$; 第一步是证明 $^{\#}(\mu(S)\cdot W_{g-1})\geqslant g$。为此, 注意到对合 $\mu\mapsto-\mu$ 像一个恒等元一样作用在 $H_2(\mathscr{J}(S))=H_1(\mathscr{J}(S))\wedge H_1(\mathscr{J}(S))$ 上, 并且因此闭链 $-\mu(S)$ 同调于 $\mu(S)$。现在, 取 $\mathscr{J}(S)$ 上的一个一般点 $\lambda=\mu(p_1)+\cdots+\mu(p_g)$, 使得 $-\mu(S)\not\subset W_{g-1}-\lambda$; 于是 $-\mu(S)$ 和 $W_{g-1}-\lambda$ 相交于孤立点, 并且对每个 $i=1,\cdots,g$ 得到

$$-\mu(p_i)=\mu\left(\sum_{j\neq i}p_j\right)-\lambda\in W_{g-1}-\lambda。$$

因此 $^{\#}(\mu(S),W_{g-1}\geqslant g$。

现在我们必须证明 Θ 与 $\mu(S)$ 的相交数为 g, 并且因此得到

$$a\cdot{}^{\#}(\mu(S)\cdot W_{g-1})+{}^{\#}(\mu(S)\cdot\Theta')=g。$$

但是我们总可以找到 $\lambda\in\mathscr{J}(S)$ 使得 $\mu(S)\not\subset\Theta'+\lambda$; 因此 $^{\#}(\mu(S),\Theta')\geqslant 0$, 并且得到 $a=1$, $^{\#}(\mu(S)\cdot W_{g-1})=g$ 和 $^{\#}(\mu(S)\cdot\Theta')=0$。

还要证明 $\Theta'=0$。我们利用下面的讨论: 因为 $^{\#}(\mu(S)\cdot\Theta')=0$, 所以

$$\mu(S)\cap\Theta'_\lambda\neq\emptyset\Rightarrow\mu(S)\subset\Theta'_\lambda\quad\text{对任意}l\in\mathscr{J}(S);$$

由此得到

$$\Theta'_\lambda\cap W-2\neq\emptyset\Rightarrow W_2\subset\Theta'_\lambda\quad\text{对任意}\lambda\in\mathscr{J}(S),$$

因为

$$\begin{aligned}\Theta'_\lambda &\ni \mu(p_1)+\mu(p_2)\\ &\Rightarrow \Theta'_{\lambda+\mu(p_1)}\ni\mu(p_2)\\ &\Rightarrow \Theta'_{\lambda+\mu(p_1)}\ni\mu(p_2^*)\quad\text{对所有}p_2^*\in S\\ &\Rightarrow \Theta'_\lambda\ni\mu(z_1)+\mu(p_2^*)\quad\text{对所有}p_2^*\in S\\ &\Rightarrow \Theta'_\lambda\ni\mu(z_1^*)+\mu(p_2^*)\quad\text{对所有}p_1^*,p_2^*\in S,\end{aligned}$$

即, $W_2\subset\Theta'_\lambda$。重复讨论对任意 n 给出

$$\Theta'_\lambda\cap W_n\neq\emptyset\Rightarrow\Theta'_\lambda\supset W_n。$$

但是由 Jacobi 定理得到 $W_g = \mathscr{J}(S)$, 并且因此 $\Theta'_\lambda \cap W_G = \emptyset$; 于是 $\Theta'_\lambda = 0$。 证毕

注意, 由 Riemann–Roch 公式, 如果 D 是任意 $g-1$ 次有效除子, 那么 $K-D$ 也是; 所以

$$W_{g-1} = \mu(K) - W_{g-1}。$$

现在, 可以确定出现在 Riemann 定理中的常数 κ 了: 我们得到

$$\begin{aligned} W_{g-1} + \kappa &= \Theta \\ &= -\Theta \\ &= -W_{g-1} - \kappa \\ &= W_{g-1} - \kappa - \mu(K)。\end{aligned}$$

因为 W_{g-1} 是主极化的 θ 除子, 所以由第317页的结果, 它不能被任意非零的平移所固定, 并且我们找到

$$2\kappa = -\mu(K)。$$

类似地, 当 $\mu(S) \subset \Theta_\lambda$ 时,我们可以完全确定它: 显然, $\lambda - \mu(p) \in W_{g-1}$ 当且仅当对某些包含点 $p \in S$ 的 $D \in S^{(g)}$, $\lambda = \mu(D)$。因此, $\lambda - \mu(S) \subset W_{g-1}$ 当且仅当对某些使得 $h^0(D) > 1$ 的 D 有 $\lambda = \mu(D)$,。现在, 对任意 $\lambda = \mu(D)$ 我们得到

$$\begin{aligned} \lambda - \mu(S) \subset W_{g-1} &\iff \lambda - \mu(S) - \kappa \subset \Theta \\ &\iff \mu(S) - \lambda - \kappa \subset \Theta \\ &\iff \mu(S) \subset \Theta + \kappa + \lambda, \end{aligned}$$

即, $\mu(S) \subset \Theta_\kappa + \lambda$ 当且仅当对某些使得 $h^0(D) > 0$ 的 $D \in S^{(g)}$, $\lambda = \mu(D)$。通过注记我们可以把它用更内在的方式表达出来: *上面(第336页)的引理不能给出 Jocabi 反演问题的显式答案——对给定的 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$ 找到 $D \in S^{(g)}$ 使得 $\mu(D) = \lambda$——正好是当答案不唯一时, 即这样的 D 在非平庸线性系中变化。*

Riemann 奇异性定理

我们现在把注意力转向子簇 $W_d = \mu(S^{(d)}) \subset \mathscr{J}(S)$, 它把 S 上的 d 次有效除子的线性等价类参数化。我们的目标是证明一个定理, 它的特殊情形由 Riemann 提出, 这个定理把簇 W_d 的局域几何——特别是它们在各种点处的切锥——与 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中 S 的典范曲线上相应的线性系 $|D|$ 的几何联系起来。

首先, 注意到我们有一个自然等价

$$\mathbb{P}(T'_\mu(\mathscr{J}(S))) \cong \mathbb{P}(H^0(S, \Omega^1_S)^*),$$

它把伴随于 Jacobi 簇 $\mathscr{J}(S)$ 的切空间的射影空间与典范映射

$$\iota_K : S \to \mathbb{P}(H^0(S, \Omega^1_S)^*) \cong \mathbb{P}^{g-1}$$

的外围空间等价起来。今后, 当我们提到 $\mathbb{P}^{g-1}$ 时, 总特别表示 $\mathbb{P}(H^0(S,\Omega_S^1)^*)$。特别是, 在任意点 $\mu\in X$ 的任意子簇 $X\subset\mathscr{J}(S)$ 的射影切锥

$$P(T'_\mu(X))\subset\mathbb{P}(T'_\mu(\mathscr{J}(S)))=\mathbb{P}^{g-1}$$

将被看作典范曲线的外围空间 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的子簇; 我们将用 $T_\mu(X)$ 来表示这个簇。

回顾一下我们的记号, 设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 是 S 上全纯 1 形式的基, 使得映射

$$\mu:S\to\mathscr{J}(S)$$

由

$$\mu(p)=\left(\int_{p_0}^p\omega_1,\cdots,\int_{p_0}^p\omega_g\right)$$

给出, 并且映射 $\mu:S^{(d)}\to\mathscr{J}(S)$ 由

$$\mu(p_1+\cdots+p_d)=\mu(p_1)+\cdots+\mu(p_d)$$

给出。只要我们有 S 上的一个局域坐标 z, 我们就可以用

$$\omega_\alpha(p)=\Omega_\alpha(p)dz$$

来定义函数 Ω_α, 使得矢量

$$\Omega(p)=(\Omega_1(p),\cdots,\Omega_g(p))$$

表示 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中典范曲线的点 p。

我们的第一个目标是在几何上描写点 $\mu(D)$ 处簇 W_d 的切锥。首先假定除子 D 是正则的, 即 $\dim|D|=0$。由 Riemann–Roch 定理的几何描述, 典范曲线上 D 的点的线性张开 $\overline{D}$ 是 $(d-1)$ 维平面, 并且我们声称,

W_d 在 $\mu(D)$ 处是光滑的, 并且切空间 $T_{\mu(D)}(W_d)=\overline{D}$。

证明: 首先假设 $D=p_1+\cdots+p_d$, 其中的点 p_i 都不相同, 使得 p_i 附近 S 上的局域坐标 z_i 提供了 D 附近的 $S^{(d)}$ 的局域坐标。映射 $\mu:S^{(d)}\to\mathscr{J}(S)$ 由

$$\mu(p_1+\cdots+p_d)=\left(\sum_i\int_{p_0}^{p_i}\omega_1,\cdots,\sum_i\int_{p_0}^{p_i}\omega_g\right)$$

给出。微分后, 我们得到, 映射 μ 的 Jacobi 簇 $\mathscr{J}(\mu)$ 为

$$\mathscr{J}(\mu)=\begin{pmatrix}\Omega_1(p_1),\cdots,\Omega_g(p_1)\\ \vdots\\ \Omega_1(p_d),\cdots,\Omega_g(p_d)\end{pmatrix}。$$

由假设得到, 表示典范曲线上点 p_i 的行矢量 $\Omega(p_i)=(\Omega_1(p_i),\cdots,\Omega_g(p_i))$ 都是独立的。因此 $\mathscr{J}(\mu)$ 在 D 处有最大秩 d, 所以 $W_d=\mu(S^{(d)})$ 在 $\mu(D)$ 处是光滑的, 并且切空间由点 p_i 张开。

通过假设 $D = 2p_1 + p_2 + \cdots + p_{d-1}$——其中 p_i 不相同——我们来说明在 $S^{(d)}$ 的对角上出现了什么情况; 一般情况只是概念更复杂而已。设 z 是 p 的坐标, 在 p_1 的邻域变化, 并且对如上的 $\Omega(p) = (\Omega_1(z), \cdots, \Omega_g(z))$ 我们定义

$$\Omega'(p) = \left(\frac{d\Omega_1}{dz}, \cdots, \frac{d\Omega_g}{dz}\right)。$$

$\mathbb{P}^{g-1}$ 中由 $\Omega(p)$ 和 $\Omega'(p)$ 确定的直线 $\overline{\Omega(p)\Omega'(p)}$ 是 p 处典范曲线的切线。对

$$w_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad w_2 = z_1 z_2,$$

我们设

$$F_\alpha(w_1, w_2) = \int_{p_0}^{z_1} \omega_\alpha + \int_{p_0}^{z_2} \omega_\alpha。$$

从

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial w_1} d\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial w_2} d(z_1 z_2) = \omega_\alpha(z_1) + \omega_\alpha(z_2),$$

我们推导出

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial w_1} = \frac{1}{2}(\Omega_\alpha(z_1) + \Omega_\alpha(z_2)); \qquad \frac{\partial F_\alpha}{\partial w_2} = \frac{\Omega(z_1) - \Omega(z_2)}{z_2 - z_1}。$$

设 z_2 变到 z_1 后, 得到在 $D = 2p_1 + p_2 + \cdots + p_{d-1}$ 处计算的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \Omega(p_1) \\ -\Omega'(p_1) \\ \Omega(p_2) \\ \vdots \\ \Omega(p_{d-1}) \end{pmatrix},$$

并且进行如前当点不同时的讨论即得。 证毕

现在假设 D 在 r 维线性系中移动, 并且用

$$D_\lambda = p_1(\lambda) + \cdots + p_d(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{P}^r$$

来表示 $|D|$ 中的除子。按照 Riemann–Roch 公式, 每个 D_λ 的点 $p_i(\lambda)$ 将在 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中张开一个 $(d - r - 1)$ 维平面; 在这种情况下, 我们声称

在点 $\mu(D)$ 处 W_d 的射影切锥是由线性系 $|D|$ 的除子张开的平面的并集

$$T_{\mu(D)}(W_d) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{P}^r} \overline{D}_\lambda。$$

证明: 回想一下, 在 $\mu(D)$ 处 W_d 的切锥是 W_d 中解析弧的在 $\mu(D)$ 处所有切线的轨迹。现在, 设

$$D(t) = q_1(t) + \cdots + q_d(t)$$

是在对称积 $S^{(d)}$ 中的任意路径, 其中对某些 $D_\lambda \in |D|$ 有

$$D(0) = D_\lambda = p_1(\lambda) + \cdots + p_d(\lambda)。$$

于是, 像的弧

$$w(t) = \mu(D(t))$$

处在 W_d 中, 并且 $w(0) = \mu(D)$; 并且反过来, W_d 中的任意弧由这种方式给出。为了概念上的简单, 我们假定 $p_i(\lambda)$ 是不同的并且设 z_i 是 $p_i(\lambda)$ 周围的局域坐标。那么, 如果 $q_i(t)$ 的坐标为 $z_i(t)$, 那么,

$$\begin{aligned} w(t) &= \mu(q_1(t)) + \cdots + \mu(q_d(t)) \\ &= \left(\cdots, \sum_{i=1}^{d} \int_{p_0}^{z_i(t)} \Omega_\alpha(z_i) dz_i, \cdots\right), \end{aligned}$$

其中, 在 $p_i(\lambda)$ 附近 $\omega_\alpha = \Omega_\alpha(z_i)dz_i$ 如前。微分后,

$$\frac{dw}{dt} = \left(\cdots, \sum_i \Omega_\alpha(z_i(t)) z_i'(t), \cdots\right),$$

并且设 $t = 0$ 后, $\mu(D)$ 处 $w(t)$ 的切线是

$$\sum_{i=1}^{d} z_i'(0)\Omega(p_i(\lambda))。$$

现在, 假设数 $z_i'(0)$ 和点 $\lambda \in \mathbb{P}^r$ 可以任意规定, 它表明, 作为一个集合有

$$T_{\mu(D)}(W_d) = \bigcup_\lambda \overline{p_1(\lambda), \cdots, p_d(\lambda)},$$

正如所期望的一样。 证毕

特别注意, 如果 $r > 0$, 那么 $T_{\mu(D)}(W_d)$ 包含典范曲线的 r 次割线簇; 因为它不处在任何 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的线性子空间中, 所以我们得到

$\mu(D)$ 是 W_d 的奇异点当且仅当 $\dim |D| > 0$。

我们可以内在地把前面的计算解释如下: 在等价 $|D| = \mathbb{P}^r$ 下, 线性系 $|D| \subset S^{(d)}$ 是正规丛为 $N \to \mathbb{P}^r$ 的复子流形。我们用 $\mathbb{P}(N)$ 表示所伴随的射影丛, 它的纤维由

$$\mathbb{P}(N)_\lambda = \mathbb{P}(N_\lambda)$$

给出。一起 $\mu : S^{(d)} \to \mathscr{J}(S)$ 把 $\mathbb{P}^r$ 映射到点 $\mu(D)$, 那么, 微分 μ_* 在 $\mathbb{P}^r$ 的切矢量上为零, 并且因此 $\mu_*(\xi) \in T'_{\mu(D)}(\mathscr{J}(S))$ 对任意 $\xi \in N_\lambda$ 有明确的定义。它诱导出一个同态映射

$$\mu_* : \mathbb{P}(N) \to \mathbb{P}^{g-1},$$

其像是切锥 $T_{\mu(D)}(W_d)$。对每个 λ, 纤维 $\mathbb{P}(N)_\lambda$ 由 $S^{(d)}$ 中经过 D_λ 的弧参数化, 并且上述计算表明, μ_* 把 $\mathbb{P}(N)_\lambda$ 同构地映射到子空间 $\overline{D}_\lambda \subset \mathbb{P}^{g-1}$。

在可用的线性系中平面 $\overline{D}$ 的一个性质如下:

引理: 如果点 $q \in \mathbb{P}^{g-1}$ 处在两个割线平面 $\overline{D}_\lambda, \overline{D}_{\lambda'}$ 上, 那么, 对由 D_λ 和 $D_{\lambda'}$ 张开的平面束中的每个 D_μ, 它都处在 $\overline{D}_\mu$ 上; 或者换句话说, 映射 $\mu_* : \mathbb{P}(N) \to T_{\mu(D)}(W_d)$ 的纤维是线性空间。

证明: 假定完备线性系 $|D|$ 的维数为 r。由 Riemann–Roch 公式得到, 任意除子 $F \in |K-D|$ 的点张开一个 $(g-r-2)$ 维平面 $\overline{F}$。于是, $\mathbb{P}^{g-1}$ 中包含 F 的超平面线性系在典范曲线上切出完备线性系 $|D|$; 特别是, 任意束 $\{D_\mu\} \subset |D|$ 由经过 F 的超平面束切出。因此, 如果 q 处在束 $\{D_\mu\}$ 的两个割线平面 $\overline{D}_\lambda$ 和 $\overline{D}_{\lambda'}$ 上, 那么它处在由任意平面 $\overline{D}_\mu$ 和除子 $F \in |K-D|$ 所张开的超平面中。但是当然, 典范曲线与包含 D_μ 的任意超平面的剩下的相交就是线性系 $|K-D|$ 的一个除子, 所以它表明 q 处在包含 D_μ 的任意超平面上, 即, q 处在 $\overline{D}_\mu$ 上。

证毕

接下来我们设 $\mathbb{T} = T_{\mu(D)}(W_d)$ 并且将证明

命题: 对 $\dim|D| = r$ 的 $D \in S^{(d)}$, 射影切锥 $\mathbb{T} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ 的次数为 $\binom{g-d+r}{r}$。

证明:

设 $q_1, \cdots, q_{g-d+r}$ 是 S 是一般点, 特别是使得

$$(*) \qquad \dim|D + q_1 + \cdots + q_{g-d+r}| = \dim|D| = r,$$

并且对任意 $\alpha \leqslant r$ 的子集 $q_1, \cdots, q_\alpha$, 有

$$(**) \qquad \dim|D - q_1 \cdots - q_\alpha| = \dim|D| - \alpha = r - \alpha。$$

注意, 由 $(*)$ 得到, 点 $q_1, \cdots, q_{g-d+r}$ 在典范曲线上都是独立的; 用 $\overline{E}$ 来表示它们张开的线性空间 $\mathbb{P}^{g-d+r-1} \subset \mathbb{P}^{g-1}$。

为了证明命题, 我们将证明, E 与 $\mathbb{T}$ 横截相交于次数为 $\binom{g-d+r}{r}$ 的一个簇; 我们将特别证明

1. 交集 $\mathbb{T} \cap \overline{E}$ 是 $\mathbb{P}^{d-g+r-1}$ 中 $\binom{g-d+r}{r}$ 个同等的 $(r-1)$ 维平面的并集

$$\bigcup_{\substack{I \subset \{1, \cdots, g-d+r\} \\ \# I = r}} \overline{q_{i_1}, \cdots, q_{i_r}};$$

2. 这个相交是横截的。

为了证明第一点, 我们注意到, 对任意多重指标 $I = \{i_1, \cdots, i_r\} \subset \{1, \cdots, g-d+r\}$, 我们可用找到包含点 $q_{i_1}, \cdots, q_{i_r}$ 的一个除子 $D_\lambda \in |D|$; 那么我们可以得到,

$$\overline{q_{i_1}, \cdots, q_{i_r}} \subset \overline{D}_\lambda,$$

并且因此一般有

$$\bigcup_I \overline{q_{i_1}, \cdots, q_{i_r}} \subset \mathbb{T} \cap \overline{E}。$$

反过来, 假设 D_λ 是 $|D|$ 中的任意除子, 并且 D_λ 正好包含 α 个点 q_i, 我们把它取为 $q_1, \cdots, q_\alpha$(由 $(*)$ 得到, 当然 $\alpha \leqslant r$)。于是因为由 $(**)$ 得到,

$$\dim |D + q_{\alpha+1} + \cdots + q_{g-d+r}| = \dim |D| = r,$$

所以由 Riemann–Roch 公式得到,

$$\dim(\overline{D_\lambda \cup E}) = \dim \overline{D_\lambda, q_{\alpha+1}, \cdots, q_{g-d+r}} = g - 1 - \alpha。$$

从线性代数得到,

$$\begin{aligned} \dim(\overline{D}_\lambda \cap \overline{E}) &= \dim \overline{D}_\lambda + \dim \overline{E} - \dim \overline{D_\lambda \cup E} \\ &= \alpha - 1, \end{aligned}$$

即, $\overline{D}_\lambda$ 与 $\overline{E}$ 只相交在张开 $\overline{q_1, \cdots, q_\alpha}$ 中。于是,

$$\overline{E} \cap \mathbb{T} \subset \bigcup_I \overline{q_1, \cdots, q_\alpha},$$

并且引理的第一部分得证。

注意, 由这个讨论得到, 对 S 上的一般点 $q_1, \cdots, q_r$ 和在 $\overline{q_1, \cdots, q_r}$ 中而不在 $q_1, \cdots, q_r$ 的真子集的张开中的任意点 q, 将存在包含 q 的一个唯一的平面 $\overline{D}_\lambda$。因此,

于是 μ_* 一般是一对一的, 即, 平面 $\overline{D}_\lambda$ 只扫过簇 $\mathbb{T}$ 一次。

特别是, 它保证了 $\mathbb{T}$ 的维数的确是 $d-1$。

在第二部分的证明中的第一——和主要——步骤是证明:

$(*)$ *对一般点 $q_1, \cdots, q_r \in S$, 在 $\overline{q_1, \cdots, q_r}$ 中, 簇 $\mathbb{T}$ 在同等超平面的补集*

$$\overline{q_1, \cdots, q_r} - \bigcup_{r=1}^{r} \overline{q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_r}。$$

中是光滑的。

我们已经知道, μ_* 在这样的点上是一对一的; 为了证明它, 我们必须证明, 映射 $\mu_*: \mathbb{P}(N) \to \mathbb{T}$ 在 q 处有非零的微分。为此, 我们在坐标为 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ 的邻域 $U \subset \mathbb{P}^r$ 中进行讨论, 其中 $p_i(\lambda)$ 是 Λ 的单值函数; 我们选择 $p_i(0)$ 周围的一个局域坐标 z_i, 并且把 $z_i(\lambda) = z_i(p_i(\lambda))$ 看作 λ 的函数。在任意给定点, 都可以选择 $\lambda_\alpha (1 \leqslant a \leqslant r)$ 使得 $\partial z_\alpha(\lambda)/\partial \lambda_b = \delta_b^a$。

我们可以假设 $p_1(\lambda), \cdots, p_{d-r}(\lambda)$ 张开 $\overline{D}_\lambda$; 那么, 对 $\mathbb{P}(N)|_U$ 的纤维中的相应齐次坐标 $t = [t_1, \cdots, t_{d-r}]$, 映射 μ_* 有一个提升

$$\tilde{\mu}_*: U \times \mathbb{C}^{d-r} \to \mathbb{C}^g,$$

它定义为

$$\tilde{\mu}_*(\lambda, t) = t_1\Omega(p-1(\lambda)) + \cdots + t_{d-r}\Omega(p_{d-r}(\lambda))。$$

注意, $\tilde{\mu}_*$ 在 $\mathbb{P}^n$ 的每个纤维上是线性的, 可直接验证: μ_* 的 Jacobi 矩阵比 $\tilde{\mu}_*$ 的 Jacobi 矩阵的秩小 1, 并且我们可以计算后者。利用 $1 \leqslant \sigma \leqslant d-r$ 范围的指标, $\tilde{\mu}_*$ 的 Jacobi 簇为

$$\begin{pmatrix} \partial\tilde{\mu}_*/\partial t_1 \\ \vdots \\ \partial\tilde{\mu}_*/\partial t_{d-r} \\ \partial\tilde{\mu}_*/\partial\lambda_1 \\ \vdots \\ \partial\tilde{\mu}_*/\partial\lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(p_1(\lambda)) \\ \vdots \\ \Omega(p_{d-r}(\lambda)) \\ \displaystyle\sum_\sigma t_\sigma(\partial z_\sigma/\partial\lambda_1)\Omega'(p_\sigma(\lambda)) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_\sigma t_\alpha(\partial z_\sigma/\lambda_r)\Omega'(p_\sigma(\lambda)) \end{pmatrix}。$$

在 $\partial z_a(\lambda)/\partial\lambda_b = \delta_b^a$ 的点处, 它是

$$\begin{pmatrix} \Omega(p_1(\lambda)) \\ \vdots \\ \Omega(p_{d-r}(\lambda)) \\ t_1\Omega'(p_1(\lambda)) + \displaystyle\sum_{\sigma\geqslant r+1} t_\sigma(\partial z_\sigma/\partial\lambda_1)\Omega'(p_\sigma(\lambda)) \\ \vdots \\ t_r\Omega'(p_r(\lambda)) + \displaystyle\sum_{\sigma\geqslant r+1} t_\alpha(\partial z_\sigma/\lambda_r)\Omega'(p_\sigma(\lambda)) \end{pmatrix};$$

在前 r 个点 p_i 的张开中——使得 $t_{r+1} = \cdots = t_{d-r} = 0$——而不在它们的任意真子集的张开中——使得对 $\alpha \leqslant r$ 有 $t_\alpha \neq 0$——的点 $p \in \overline{p_1, \cdots, p_r}$ 处, 这个矩阵的秩就是下列矩阵的秩:

$$\begin{pmatrix} \Omega(p_1) \\ \vdots \\ \Omega(p_{d-r}) \\ \Omega'(p_1) \\ \vdots \\ \Omega'(p_r) \end{pmatrix}。$$

但是现在, 如果 $p_1, \cdots, p_r$ 是一般点, 那么

$$\dim|D + p_1 + \cdots + p_r| = \dim|D| = r,$$

并且因此由 Riemann–Roch 公式得到, 张开

$$\begin{aligned} \overline{D_\lambda + p_1 + \cdots + p_r} &= \overline{2p_1 + \cdots + 2p_r + p_{r+1} + \cdots + p_d} \\ &= \overline{\Omega(p_1), \cdots, \Omega(p_{d-r}), \Omega'(p_1), \cdots, \Omega'(p_r)} \end{aligned}$$

的维数为 $d-1$。因此, 在 $p_1,\cdots,p_r$ 的一般点处 Jacobi 簇有最大秩, 并且第一个断言得到证明。

在第二部分的证明中剩下的两步很简单。第二步是证明

对某些 $q_1,\cdots,q_{g-d+r}$, 在 $\overline{q_1,\cdots,q_r}$ 的一般点处的相交 $\overline{E}\cap\mathbb{T}$ 是横截的。

这可直接得到: 现在一般的 $q_1,\cdots,q_r$, 取任意不处在超平面 $\overline{q_1,\cdots,q_{i-1},q_{i+1},\cdots,q_r}$ 中的任意 $q\in\overline{q_1,\cdots,q_r}$, 并且因此选择独立的 $q_{r+1},\cdots,q_{g-d+r}$ 模子空间 $T_q(\mathbb{T})$。

最后, 我们声称, 对 S 上的一般 $q_1,\cdots,q_{g-d+r}$,

(∗) 在每个 $(r-1)$ 维平面 $\overline{q_{i_1},\cdots,q_{i_r}}$ 的一般点处, 相交 $\overline{E}\cap\mathbb{T}$ 是横截的。

为此, 考虑把 $(q_1+\cdots+q_r,q_{r=1}+\cdots+q_{g-d+r})$ 变成 $(q_1+\cdots+q_{g-d+r})$ 的映射

$$\pi:S^{(r)}\times S^{(g-d)}\to S^{(g-d+r)},$$

并且 $B\subset S^{(g-d+r)}$ 是 $q_1,\cdots,q_{g-d+r}$ 的轨迹, (∗) 对它不成立。由第二步得到, $\pi^{-1}(B)\neq S^{(r)}\times S^{(g-d)}$, 并且因为 $S^{(r)}\times S^{(g-d)}$ 是不可约的, 所以 B 的维数严格小于 $g-d+r$; 于是命题得证。 证毕

总之, 我们证明了

Riemann–Kempf* **奇异性定理**: 对一个 r 维 d 次线性系 $|D|$, 切锥

$$T_{\mu(D)}(W_d)=\bigcup_{D-\lambda\in|D|}\overline{D}_\lambda$$

是由除子 $D_\lambda\in|D|$ 的点张开的平面 $\overline{D}_\lambda=\mathbb{P}^{d-r-1}$ 的并集。它的次数为 $\begin{pmatrix}g-d+r\\ r\end{pmatrix}$, 并且只被平面 $\overline{D}_\lambda$ 扫过一次。

如果 $d=g-1$, 那么我们已经知道, W_d 是在 $\mathscr{J}(S)$ 上 θ 除子 Θ 的平移 $\Theta_{-\kappa}$, 并且由它得到了最先由 Riemann 给出的结果:

$$\operatorname{mult}_{\mu(D)}(\Theta_{-\kappa})=h^0(D);$$

特别是, θ 除子的奇异轨迹对应于那些在线性系中移动的 $g-1$ 次的除子。利用它, 容易得到,

Θ 的奇异轨迹的维数至少为 $g-4$。

证明: 假设相反, 即, $\Theta_{-\kappa}$ 的奇异轨迹的维数 $\leqslant g-5$。典范曲线上点 $p_1,\cdots,p_{g-3}$ 的一般集合张开一个 $\mathbb{P}^{g-4}$。设 $\varphi:S\to\mathbb{P}^2$ 是从这个 $\mathbb{P}^{g-4}$ 到 S 的投影。对 S 上的点 $p\neq q$,

$$\varphi(p)=\varphi(q)$$

*参见: G. Kempf, On the Geometry of a theorem of Riemann, *Annals of Math.*, Vol. 98(1973), 178–185.

当且仅当

$$\overline{p, p_1, \cdots, p_{g-3}} = \overline{q, p_1, \cdots, p_{g-3}},$$

它等价于

$$\dim \overline{p, q, p_1, \cdots, p_{g-3}} = q - 3,$$

即,

$$\dim |p + q + p_1 + \cdots + p_{g-3}| = 1。$$

计算维数后我们推导出, 如果 $\dim(\Theta_{-\kappa})_s$ 严格小于 $g-4$, 那么, 将有 ∞^{g-4} 个 $\dim \overline{D} \leqslant g-3$ 的除子 $D \in S^{(g-1)}$, 并且因此对 $p_1, \cdots, p_{g-3}$ 的一般选择, 映射 φ 将是一对一的。但是因此像的曲线是亏格为 $g(g-1)/2$ 的 $(2g-2)-(g-3) = g+1$ 次光滑平面曲线。因为对 $g \geqslant 4$ 有 $g < (g)(g-1)/2$, 所以我们得到矛盾。 证毕

在亏格为 6 的 Riemann 曲面上, 对 2 维 5 次线性系的特殊情形, 读者可能乐意得出 Riemann 奇异性定理。验证了线性系 $|D|$ 总可以作为一条五次光滑平面曲线——使得 $2D = K$——嵌入到 S 后, 不难得到, 在点 $\mu(D)$ 处 W_5 的切锥是 Veronese 曲面 $\iota_{2H}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ 的一个弦族, 并且 $\mathbb{T}$ 的奇异轨迹就是 Veronese 曲面本身。

特殊线性系 IV

现在, 我们已经掌握一些必要的方法来回答曲线上特殊线性系的存在性问题。对每对 $1 \leqslant d \leqslant g$ 的整数 d 和 r, 我们用 W_d^r 来表示在映射

$$\mu : S^{(d)} \to \mathscr{J}(S)$$

下维数 $\geqslant r$ 的 d 次线性系的像。由真映射定理, W_d^r 是解析子簇, 并且我们将证明, 它的最小维数用本章第三节的直接维数计算来得到。

我们先计算子簇 $W_d = \mu(S^{(d)})$ 的同调类; 答案是 *Poincaré* 公式:

$$W_d \sim \frac{1}{(g-d)!}\Theta^{g-d}。$$

证明: 在 $\mathscr{J}(S)$ 的实坐标 $x_1, \cdots, x_{2g}$——它对应于 $H_1(S, \mathbb{Z})$ 的标准基的选择 $\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$——下, 我们已经证明, Θ 的 Poincaré 对偶是

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{g} dx_\alpha \wedge dx_{\alpha+g}$$

设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 为指标集合, 满足 $1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leqslant g$, 并且设 $dx_A = dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k}$, $A + g = (\alpha_1 + g, \cdots, \alpha_k + g)$, 得到

$$\omega^{g-d} = (g-d)!(-1)^{g-d} \sum_{\#A = g-d} dx_A \wedge dx_{A+g}。$$

设 $J=(j_1,\cdots,j_k)$ 为来自 $(1,\cdots,2g)$ 的指标子集, 那么因为 dx_J 给出了 $H^k(\mathscr{J}(S))$ 的一个基, 所以将得到

$$\int_{W_d} dx_J = \frac{1}{(g-d)!}\int_{\mathscr{J}(S)} \omega^{g-d}\wedge dx_J。$$

利用 ω^{g-d} 的公式, 右边为

$$\frac{1}{(g-d)!}\int_{\mathscr{J}(S)} \omega^{g-d}\wedge dx_J = \begin{cases} 1 & \text{如果对某些 } A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d) \text{ 有 } J=(A,A+g), \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

另一方面, 因为映射 $\mu^{(d)}:S^{(d)}\to W_d$ 的次数为 1 和 $\pi:S^d\to S^{(d)}$ 的次数为 $d!$, 所以

$$\int_{W_d} dx_J = \frac{1}{d!}\int_{S^d}(\mu^d)^* dx_J,$$

其中, $\mu^d=\mu^{(d)}\circ\pi:S^d\to W_d$ 是复合。现在,

$$(\mu^d)^* dx_j = \sum_{k=1}^{d}\pi_k^*\mu^* dx_j, \quad 1\leqslant j\leqslant 2g,$$

其中, $\pi_k:S^d\to S$ 是在第 k 个因子上的投影, 且 $\mu=\mu^1$; 因为 $\mu^* dx_j\in H^1_{\mathrm{DR}}(S)$ Poincaré 对偶于闭链 δ_j, 所以

$$(*)\qquad \int_S \mu^* dx_\alpha\wedge\mu^* dx_{\alpha+g}=1,$$

并且所有 $i<j$ 的 $\mu^* dx_i\wedge\mu^* dx_j$ 的其它积分都等于零。因此, 通过迭代得到,

$$\int_{s^d}(\mu^d)^* dx_J = \int_{S^d}\bigwedge_{j\in J}\left(\sum_{k=1}^{d}\pi_k^*\mu^* dx_j\right)$$

等于零, 除非对某些 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_d)$ 有 $J=(B,B+g)$, 并且在这种情况下由 $(*)$ 得到

$$\int_{S^d}(\mu^d)^* dx_{B,B+g}=d!。$$

证毕

我们现在介绍一个由 Kempf 和 Kleiman–Laksov* 得到的一个构造。回顾第328–332页, Jacobi 簇上的主极化得到了等价

$$\mathrm{Pic}^0(\mathscr{J}(S))\cong\mathscr{J}(S),$$

并且得到一个 Poincaré 丛

$$P\to\mathscr{J}(S)\times\mathscr{J}(S),$$

*S. Kleiman and D. Laksov, On the existence of special divisors, *Amer. J. Math*, Vol. 93(1972), 431–436.

其性质为

1. 在上述等价下,

$$P|_{\mathscr{J}(S)\times\lambda}=P(\lambda)$$

是对应于 $\lambda\in \mathrm{Pic}^0(\mathscr{J}(S))$ 的线丛;

2. 如果 $p_0\in S$ 是一个基点, 那么对任意 p,

$$P(\lambda)_p\cong P(\lambda+\mu(p))_{p_0}。$$

现在, 我们固定 S 上次数 $n>2g-2$ 的除子 D_0, 并且设

$$L(\lambda)=P(\lambda)+D_0。$$

当 λ 在 $\mathscr{J}(S)$ 上变化时, $L(\lambda)$ 在 S 上的所有 n 次线丛上变化。选择 $m>n$ 个 S 上的一般点。由性质 2, 存在一个自然等价

$$L(\lambda)_{p_i}\cong P(\lambda+\mu(p_i))_{p_0}\otimes L_{p_i}。$$

因为当限制到 $p_0\times\mathscr{J}(S)$ 时, Poincaré 丛在拓扑上是平庸的, 所以存在一个同构

$$L(\lambda)_{p_i}\to L_{p_i},$$

它 C^∞ 地——但不是全纯地——依赖于 $\lambda\in\mathscr{J}(S)$。

由 Riemann–Roch 公式得到 $h^0(\mathscr{O}(L(\lambda)))=n-g+1$。因为 $L(\lambda)$ 的截面在 m 点处都不等于零, 那么, 存在一个单射

$$H^0(\mathscr{O}(L(\lambda)))\to\bigoplus_{i=1}^m L(\lambda)_{p_i},$$

它的像 S_λ 是随 λ 全纯变化的 $(n-g+1)$ 维子空间 S_λ。更确切地说, 存在一个秩为 m 的全纯矢量丛 $E\to\mathscr{J}(S)$, 它的纤维为

$$E_\lambda=\bigoplus_{i=1}^m L(\lambda)_{p_i};$$

如果 $G(n-g+1,E)$ 是所伴随的 Grassmann 丛, 纤维为

$$G(n-g+1,E)_\lambda=G(n-g+1,E_\lambda),$$

那么子空间 $\{S_\lambda\subset E_\lambda\}$ 给出了

$$G(n-g+1,E)$$

的全纯截面。

构造的要点是: 对每个 d, 我们考虑全纯子丛 $V_{m-n+d} \subset E$, 其纤维为

$$V_{m-n+d,\lambda} = \bigoplus_{i=1}^{m-n+d} L(\lambda)_{p_i},$$

并且设

$$\begin{aligned} E_d(\lambda) &= L(\lambda) - p_{m-n+d+1} - \cdots - p_m \\ &= P(\lambda) + D_0 - p_{m-n+d+1} - \cdots - p_m。\end{aligned}$$

于是我们得到,

$$h^0(E_d(\lambda)) = \dim S_\lambda \cap V_{m-n+d}。$$

它可以如下重新表述: 把 C^∞ 等价 $L(\lambda)_{p_i} \cong L_{p_i}$ 与同构 $L_{p_i} \cong \mathbb{C}$ 联合起来得到一个 C^∞ 的平庸化

$$\varphi : E \to \mathscr{J}(S) \times \mathbb{C}^m,$$

它把直和分解 $E = \oplus_{i=1}^m L(\lambda)_{p_i}$ 变到 $\mathbb{C}^m$ 的坐标轴上。因此, 我们得到一个 C^∞ 映射

$$\alpha : \mathscr{J}(S) \to G(n-g+1, m),$$

它由 $\alpha(l) = \varphi(S_\lambda)$ 给出。如果 $e_1, \cdots, e_m$ 是 $\mathbb{C}^m$ 的标准基并且 $V_{m-n+d} = \{e_1, \cdots, e_{m-n+d}\}$, 那么,

由簇 W_d^r 的 $\mu(-D_0 + p_{m-n+d+1} + \cdots + p_m)$ 得到的平移在集合论上是在 Schubert 闭链的 α 下的逆像:

$$\sigma_{g+r-d,\cdots,g+r-d}(V_{m-n+d}) = \{\Lambda \in G(n-g+1, m); \dim(\Lambda \cap V_{m-n+d}) \geqslant r+1\}。$$

我们注意到, 即使映射 α 不是全纯的, 在任意 Schubert 闭链的 α 下的逆像是 $\mathscr{J}(S)$ 的一个复解析子簇, 其中 Schubert 闭链对应于一个标志, 而标志的子空间是 $\mathbb{C}^m$ 中同等的 $\mathbb{C}^k$。另外, 这些闭链的 Schubert 条件在 Grassmann 丛的纤维上有意义。

我们要得到的结果是下面第358页给出的关于 $\dim W_r^d$ 的下界。证明的关键步骤是:

引理: *除了在 $\sigma_{g-d,g-d}(V_{m-n+d})$ 之外, $\alpha(\mathscr{J}(S))$ 与特殊 Schubert 闭链 $\sigma_{g-d}(V_{m-n+d})$ 横截相交。*

回想一下, 在集合论上, $\alpha^{-1}(\sigma_{g-d}(V_{m-n+d}))$ 是 W_d 的平移; 因为 W_d 是不可约的, 所以引理在本质上等于证明: $\alpha(\mathscr{J}(S))$ 沿着相交不处处相切于 $\sigma_{g-d}(V_{d+1})$。

假设引理成立后, 在剩余部分证明背面的想法是: 首先, 由引理, W_d 的基本类是 $\alpha^*(\sigma_{g-d})$。于是, 由 Poincaré 公式得到

$$\alpha^*(\sigma_{g-d}) \sim \frac{1}{(g-d)!}\Theta^{g-d}。$$

最后, 就象在第一章第六节所证明的一样, 每个 Schubert 闭链——特别是 $\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}$——可以表示为基本 Schubert 闭链的多项式; 进行明确的计算后得到

$$\alpha^*(\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}) = c\Theta^{(r+1)(g+r-d)}, \quad c \neq 0,$$

并且这表明下界为 $\dim W_d^r \geqslant g-(r+1)(g+r-d)$。

引理的证明: 取 $\lambda_0 \in \alpha^{-1}\sigma_{g-d}(V_{m-n+d})$。在典范曲线 S 上选择独立的点 $q_1,\cdots,q_g$, 并且设

$$E_0 = q_1+\cdots+q_g - P(\lambda_0)。$$

因为 $\mu: S^{(g)} \to \mathscr{J}(S)$ 在 $q_1+\cdots+q_g$ 周围是一对一的, 那么对 λ_0 周围的所有 λ, 存在唯一被确定的点 $q_1(\lambda),\cdots,q_g(\lambda)$, 使得

$$P(\lambda) = [q_1(\lambda)+\cdots+q_g(\lambda)-E_0]; \quad q_i(\lambda_0)=q_i。$$

设

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\lambda) &= \mathscr{L}\left(\sum_{i=1}^{g} q_i(\lambda) - E_0 + D_0\right) \\ &= \{f \in \mathscr{M}(S) : (f) + \sum q_\alpha(\lambda) - \sum r_k + D_0 \geqslant 0\} \\ &\cong H^0(\mathscr{O}(L(\lambda))),\end{aligned}$$

并且考虑映射

$$\mathscr{L}(\sum q_i(\lambda) - E_0 + D_0) \xrightarrow{R} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{C}_{p_i},$$

它由

$$R(f) = (f(p_i),\cdots,f(p_m))$$

给出。它对 λ_0 的邻域 U 中的 λ 定义了一个映射

$$\tilde{\alpha}: H^0(\mathscr{O}(L(\lambda))) \to \mathbb{C}^m,$$

它就是在 E 的适当局域平庸化中的映射 α。

现在, 设

$$\beta: U \to G(m-n+g-1, m)$$

是 $\tilde{\alpha}$ 与自然同构

$$*: G(n-g+1, \mathbb{C}^n) \to G(m-n+g-1, \mathbb{C}^{m*})$$

的复合, 使得 $\beta(\lambda)$ 就是 $m-n+g-1$ 维在点 $p_1,\cdots,p_m$ 处 $f \in \mathscr{L}(\lambda)$ 的取值 $R(f)$ 上的关系矢量空间。我们要证明, $\beta(U)$ 与对偶 Schubert 闭链

$$*(\sigma_{g-d}) = \{\Lambda^* : \dim(\Lambda^* \cap \ \mathrm{Ann} V_{m-n+d}) \geqslant g-d\}$$

在 $\beta(\lambda_0)$ 处横截相交。

现在, 如果 λ_0 对应于不在 W_d^1 中的除子 $D \in W_d$, 即, 如果

$$h^0(P(\lambda_0) + D_0 - p_{m-n+d+1} - \cdots - p_m) = 1,$$

那么, 对 i 在 1 和 $m-n+d$ 之间, $j_1, \cdots, j_{g-d}$ 在 $m-n+d+1$ 和 m 之间的选择, 我们得到

$$h^0(P(\lambda_0) + D_0 - p_{m-n+d+1} - \cdots - p_m - p_i + p_j + \cdots + p_{j_{g-d}}) = 0。$$

为了记号方便, 我们取 $i = 1, j_1, \cdots, j_{g-d} = m-n+d+1, \cdots, m-n+g$。于是, 它意味着 $\mathbb{C}^m$ 中的子空间 $\alpha(\lambda_0)$ 与子空间

$$\mathbb{C}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{p_{m-n+g}}$$

互补。那么, 就象我们在第一章第五节所得到的一样, 在 $\beta(\lambda_0)$ 的邻域中的任意 Λ 可以唯一表示为下列矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,m-n+g+1} & \cdots & a_{1,m} \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & . & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & . & & \\ a_{m-n+g-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{m-n+g-1,m-n+g+1} & \cdots & a_{m-n+g-1,m} \end{pmatrix}。$$

矩阵中未确定的元素 a_{ij} 是 $\beta(\lambda_0)$ 附近 $G(m-n+g-1, m)$ 的 Plücker 坐标; 并且在这些坐标下, Schubert 闭链 $*\sigma_{g-d}(\mathrm{Ann}\, V_{m-n+d})$ 由

$$a_{m-n+d,1} = \cdots = a_{m-n+g-1,1} = 0$$

给出。

为了在这些坐标下得到 λ_0 周围的映射 β, 我们首先如下找到子空间 $R(\mathscr{L}(\lambda))$ 上的线性关系: 由 Riemann–Roch 公式得到,

$$h^0(S, \Omega^1(E_0 - \sum q_i(\lambda) + \sum p_i - D_0)) = m-n+g-1。$$

设 $\eta_1, \cdots, \eta_{m-n+g-1}$ 是这个亚纯微分空间的基。对函数 $f \in \mathscr{L}(\lambda)$, 亚纯函数 $f \cdot \eta_\alpha$ 将只在点 p_i 处有极点, 把留数加起来后, 对每个 $\alpha = 1, \cdots, m-n+g-1$ 得到

$$\sum_i \mathrm{Res}_{p_i}(f \cdot \eta_\alpha) = \sum_i f(p_i) \cdot \mathrm{Res}_{p_i}(\eta_\alpha) = 0。$$

这就是我们所要的关系, 并且矩阵 $(\mathrm{Res}_{p_i}(\eta_\alpha))$ 表示空间 $\beta(\lambda) \subset \mathbb{C}^{m*}$。(注意, 我们的确用这种方法得到了 $\mathscr{L}(\lambda)$ 上的所有关系: 因为 $h^0(S, \Omega^1(E_0 - \sum q_i - D_0)) = 0$, 所以矩阵 $(\mathrm{Res}_{p_i}(\eta_\alpha))$ 的最大秩为 $m-n+g-1$。

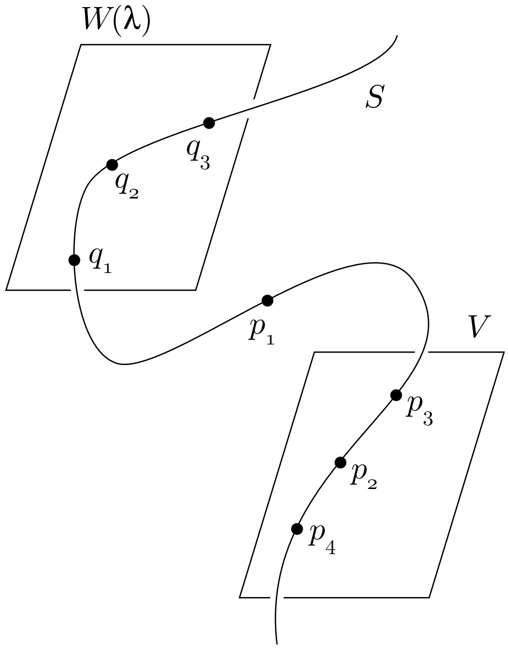


Figure 15

我们可以在几何上实现映射 β 的坐标: 再次由 Riemann–Roch 公式得到,

$$h^0(S, \Omega^1(E_0 + \sum p_i - D_0)) = m - n + 2g - 1;$$

考虑 S 在 $\mathbb{P}^{m-n+2g-2}$ 中相应的嵌入。由假设知道, 点 $p_2, \cdots, p_{m-n+g}$ 和 $q_1(\lambda), \cdots, q_g(\lambda)$ 是线性独立的; 设 V 是由点 $p_2, \cdots, p_{m-n+g}$ 张开的 $(m-n+g-2)$ 维平面, $W(\lambda)$ 是由点 $q_i(\lambda)$ 张开的 $(g-1)$ 维平面。(见图15。) 那么, 因为形式

$$\eta_\alpha \in H^0(S, \Omega^1(E_0 - \sum q_i(\lambda) + \sum p_i - D_0))$$

对应于包含点 $q_i(\lambda)$ 的 $\mathbb{P}^{m-n+2g-2}$ 中的超平面, 所以我们得到,

$\beta(\lambda)$ 的 Plücker 坐标是在从 $W(\lambda)$ 到 V 的投影下点 p_k 的像 $\pi_{W(\lambda)}(p_k)$ 的齐次坐标, 它在 V 上的坐标系中, 并且在 V 中, 点 $p_2, \cdots, p_{m-n+g}$ 表示坐标轴。

因此, 为了证明 β 在 λ_0 处的横截性, 我们必须证明, 由

$$\pi(\lambda) = \pi_{W(\lambda)}(p_1)$$

给出的映射

$$\pi : U \to V \cong \mathbb{P}^{m-n+g-1}$$

横切于由点 $p_2, \cdots, p_{m-n+d}$ 张开的 V 的子空间。为此, 设点 $q_i(\lambda)$ 是变化的。因为 $\pi(\lambda)$ 是 V 与子空间 $\overline{q_1(\lambda), \cdots, q_g(\lambda), p_1}$ 的交集, 所以当 $q_i(\lambda)$ 变化时由 $\pi(\lambda)$ 形成的弧的切线就是 V 与由 $q_1(\lambda), \cdots, q_{i-1}(\lambda), q_{i+1}(\lambda), \cdots, q_g(\lambda), p_1$ 张开的空间的交集, 并且是 $q_i(\lambda)$ 处 S 的切线。

因此, 只要切线 $\{T_{q_i(\lambda)}(S)\}_{i=1,\cdots,g}$ 以及点 $p_1,\cdots,p_{m-n+d}$ 不能张开 $\mathbb{P}^{m-n+2g-2}$, 那么 π 就不能横切于 $p_2,\cdots,p_{m-n+d}$。但是这等价于说,

$$\begin{aligned} & h^0(S,\Omega^1(E_0+\sum p_i - D_0 - 2\cdot\sum q_i(\lambda_0) - p_1 - \cdots - p_{m-n+d})) \\ = \ & h^0(S,\Omega^1(-P(\lambda_0) - D_0 + p_{m-n+d} + \cdots + p_m - q_i(\lambda_0))) \\ = \ & h^0(S,\Omega^1(-E_d(\lambda_0) - \sum q_i(\lambda_0))) \neq 0; \end{aligned}$$

并且因为点 $q_i(\lambda)$ 在 S 的典范曲线上是线性独立的, 所以并非如此。

从引理得到,

$\mathscr{J}(S)$ 上簇 W_d 的基本类是 $G(n-g+1,m)$ 上的 Schubert 闭链的上同调类经 α 的拖回。

由 Poincaré 公式得到,

$$\alpha^*\sigma_{g-d} \sim \frac{1}{(g-d)!}\Theta^{g-d}。$$

现在, 由 Giambelli 公式, 闭链 $\sigma_{g+r-d,\cdots,g+r-d}$ 的类由下列行列式给出:

$$\sigma_{g+r-d,\cdots,g+r-d} = \begin{vmatrix} \sigma_{g+r-d} & \sigma_{g+r-d+1} & \cdots & \sigma_{g+2r-d} \\ \sigma_{g+r-d-1} & \sigma_{g+r-d} & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{g-d} & & & \sigma_{g+r-d} \end{vmatrix},$$

并且因此我们可以写出:

$$\alpha^*\sigma_{g+r-d,\cdots,g+r-d} \sim \Theta^{(r=1)(g+r-d)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{(g+r-d)!} & \frac{1}{(g+r-d+1)!} & \cdots & \frac{1}{(g+2r-d)!} \\ \frac{1}{(g+r-d-1)!} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{(g+d)!} & & \cdots & \frac{1}{(g+r-d)!} \end{vmatrix}。$$

为了一般地计算 $(y+1)\times(y+1)$ 矩阵

$$\left(a_{ij} = \frac{1}{(x-i+j)!}\right)$$

的行列式 $D(x,y)$, 对 $k=2,\cdots,y+1$, 依次用 $(x+k-1)$ 乘以第 k 列并且减去第 $(k-1)$ 列的数。于是新矩阵 A' 将是

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \frac{1}{(x-i+j)!} - \frac{(x+j)}{(x-i+j+1)!} \\ &= \frac{x-i+j+1}{(x-i+j+1)!} - \frac{x+j}{(x-i+j+1)!} \\ &= \frac{1-i}{(x-i+k+1)!}, \quad j \neq y+1, \\ a'_{i,y+1} &= a_{i,y+1} = \frac{1}{(x-i+y+1)!}。 \end{aligned}$$

特别是, 除了 $a'_{1,y+1} = 1/(x+y)!$ 之外, 顶行的所有元素都是零; 并且它的余因子为 $y!\cdot D(x,y-1)$; 因此,

$$D(x,y)=\frac{y!}{(x+y)!}D(x,y-1),$$

并且因为 $D(x,1)=1/x$, 所以它得出

$$D(x,y)=\frac{y!(y-1)!\cdots 0!}{(x+y)!\cdots x!}。$$

把它应用到闭链 $\alpha^*\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}$, 我们得到

$$\alpha^*\sigma_{g+d-r,\cdots,g-d+r}=\frac{r!(r-1)!\cdots 0!}{(g+2r-d)!\cdots(g+r-d)!}\cdot\Theta^{(r+1)(g+r-d)}。$$

现在, 假设簇的维数小于 $g-(r+1)(g-d+r)$。那么, 我们可以在 $\mathscr{J}(S)$ 找到去掉 W_d^r的维数为 $(r+1)(g-d+r)$ 的闭链 V。于是我们得到

$$\begin{aligned}\alpha^*\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}(V) &= {}^{\#}(\alpha(V)\cdot\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r})\\ &= 0。\end{aligned}$$

但是另一方面, 因为 Θ 是正的, 所以

$$\begin{aligned}\alpha^*\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}(V) &= \frac{r!(r-1)!\cdots 0!}{g+2r-d)!\cdots(g+r-d)!}\cdot{}^{\#}(V\cdot\Theta^{(r+1)(g+r-d)})\\ &> 0。\end{aligned}$$

于是, 我们最后得到,

定理: *S 上 r 维 d 次线性系的簇 $W_d^r\subset\mathscr{J}(S)$ 的维数至少为 $g-(r+1)(g+r-d)$。特别是, 如果 $g\geqslant(r+1)(g+r-d)$, 那么每个亏格为 g 的 Riemann 曲面有一个这样的线性系。*

注意, 不总是 $\alpha(\mathscr{J}(S))$ 将与 Schubert 闭链 $\sigma_{g+d-r,\cdots,g-d+r}$ 横截相交的情形——我们已经知道了很多簇 $W_d^r=\alpha^{-1}\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}$ 的维数比所要求的大的情形。因此, 我们不能肯定地说 W_d^r 的类是什么。但是, 应该陈述下列显然的结果:

如果 $\alpha(\mathscr{J}(S))$ 横切于 $\sigma_{g-d+r,\cdots,g-d+r}$, 那么 W_d^r 的类为

$$W_d^r\sim\frac{r!(r-1)!\cdots 0!}{(g+2r-d)!\cdots(g+r-d)!}\Theta^{(r+1)(g+r-d)}。$$

这对在前面特殊线性系的讨论中提出的枚举问题给出了所"预期"的答案。例如, 我们已经知道, 亏格为 $g=2k$ 的一般 Riemann 曲面将有有限个 $k+1$ 次束, 并且可以给出有多少; 如果 $\alpha(\mathscr{J}(S))$ 横切于 Schubert 闭链 $\sigma_{k,k}$, 那么这个数为

$$\begin{aligned}W_{k+1}^1 &= \frac{1}{(k+1)!k!}\cdot\Theta^g\\ &= \frac{(2k)!}{(k+1)!k!},\end{aligned}$$

这是因为 $\Theta^g = g!$。注意, 如果 $g = 2, 4, 6$ 和 8, 它得到了 $1, 2, 5$ 和 14, 与我们前面的计算一样。

Torelli 定理

回想一下, 极化 *Abel* 簇是应该一个 $(M, [\omega])$, 其中 M 是一个 Abel 簇, $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ 是 M 上的极化类。在极化 Abel 簇 $(M, [\omega])$ 和 $(M', [\omega'])$ 之间的映射由全纯映射 $f : M \to M'$ 给出, 其中 $f^*([\omega']) = [\omega]$。我们已经知道, 亏格 $g \geqslant 1$ 的紧致 Riemann 曲面 S 给出一个极化 Abel 簇 $(\mathscr{J}(S), [\omega_S])$, 其中, 在内在的形式下, $\mathscr{J}(S)$ 是 $H^0(S, \Omega^1)$ 上泛函的 $(H^0(S, \Omega^1))^*$ 除以格子 $\Lambda(S) \cong H_1(S, \mathbb{Z})$ 的商, 它通过 S 的 1 维闭链上的积分得到, 并且类

$$[\omega_S] : H_2(\mathscr{J}(S), \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

在自然等价下由

$$[\omega_S](\alpha \wedge \beta) = {}^{\#}(\alpha \cdot \beta)$$

给出

$$H_2(\mathscr{J}(S), \mathbb{Z}) = \Lambda^2(H_1(S, \mathbb{Z}))。$$

现在我们将证明, 实际上曲线 S 可以重新从 $[\mathscr{J}(S), [\omega])$ 构造出来: 即

Torelli 定理: *如果 S 和 S' 是紧致 Riemann 曲面, 使得作为极化 Abel 簇有*

$$(\mathscr{J}(S), [\omega_S]) \cong (\mathscr{J}(S'), [\omega_{S'}]),$$

那么, $S \cong S'$。

证明[*]: 我们首先评注一下, 如上所述, 在 Torelli 定理的证明中本质先验的步骤由 Riemann 定理组成, 它把除了平移以外由 $[\omega_S]$ 所定义的除子 Θ 与除子 W_{g-1} 联系起来; 现在要做的是从 W_{g-1} 重新构造 S。

首先我们在 S 和 S' 是非超椭圆的情形下证明 Torelli 定理。回想一下, 如果 $M = \mathbb{C}^g/\Lambda$ 是任意复环面, 那么切空间 $\{T'_\lambda(M)\}_{\lambda \in M}$ 都自然等价于 $\mathbb{C}^g$。因此, 如果 $X \subset M$ 是任意 k 维解析子簇, $X^* = X - X_{\text{sing}}$ 是 X 的光滑轨迹, 那么我们可以用

$$\mathscr{G}_X(\lambda) = T'_\lambda(X) \subset T'_\lambda(M) = \mathbb{C}^g$$

来定义 X^* 上的 *Gauss* 映射

$$\mathscr{G}_X : X^* \to G(K, g)。$$

我们直接得到, $\mathscr{G}_X$ 是内在定义的, 并且如果 X 在 M 中被平移, 那么它不变化。

例如, 考虑由

$$\mu(z) = \left(\int_{z_0}^{z} \omega_1, \cdots, \int_{z_0}^{z} \omega_g\right)$$

[*]这个证明来自 A. Andreotti, On Torelli's theorem, *Am. J. Math.*, Vol. 80(1958), pp.801–821。

给出的标准映射 $\mu : S \to \mathscr{J}(S)$。那么 Gauss 映射

$$\mathscr{G}_\mu : S \to G(1,g) = \mathbb{P}^{g-1}$$

由

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_\mu(z) &= \left[\frac{\partial}{\partial z}\mu_1(z), \cdots, \frac{\partial}{\partial z}\mu_g(z)\right] \\ &= [\omega_1(z)/dz, \cdots, \omega_g(z)/dz] \end{aligned}$$

给出。即, $\mu(S)$ 的 *Gauss* 映射简单地是典范映射 $\iota_K : S \to \mathbb{P}^{g-1}$。

现在, 考虑伴随于 θ 除子的 $\Theta_{-\kappa} \subset \mathscr{J}(S)$ 的 Gauss 映射

$$\mathscr{G} : \Theta_{-\kappa}^* = W_{g-1}^* \to G(g-1,g) = (\mathbb{P}^{g-1})^*。$$

我们已经知道, 点 $\mu(D) \in \Theta_{-\kappa}$ 是光滑的当且仅当除子 $D = \sum p_i$ 是正则的, 并且如果是这样, 那么 $\mu(D)$ 处 $\Theta_{-\kappa}$ 的切平面是由 S 的典范情形 C 上的点 p_i 张开的超平面。因为每个 C 的超平面截面只包含有限个点, 所以映射 $\mathscr{G} : \Theta_{-\kappa}^* \to \mathbb{P}^{g-1*}$ 处处有限; 因为一般的超平面截面由一般位置上的 $2g-2$ 个点组成, 那么我们得到, 一般地, $\mathscr{G}$ 有

$$\binom{2g-2}{g-1} = \frac{g\cdot(g+1)\cdots(2g-2)}{(g-1)!}$$

个叶。

现在, 设 $B \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ 表示 $\mathscr{G}$ 的分支轨迹, 即, 在 $\Theta_{-\kappa}^*$ 中映射 $\mathscr{G}$ 奇异的点集在 $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ 中的像。在点 $\mu(D) \in \Theta_{-\kappa}^*$ 处, $D = \sum p_i \in S^{(g-1)}$, 我们可以把 S 上点 $p_1, \cdots, p_{g-1}$ 周围的局域坐标 $z_1, \cdots, z_{g-1}$ 取为 $\Theta_{-\kappa}$ 上的坐标。那么显然, 如果 C 上任意点 p_i 的情形处在由 $p_1, \cdots, p_{g-1}$ 张开的平面上, 那么,

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\mathscr{G}(\mu(D)) = 0,$$

即, $\mu(D)$ 是 $\mathscr{G}$ 的奇异点。因此, 如果我们设 $V \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ 表示 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中超平面的真子簇, 并且它与 C 的相交不在一般位置上, 那么我们得到, *处在 V 之外的 C 的任意切超平面 H 在 $\mathscr{G}$ 的分支轨迹 B 中*。

反过来, 如果 H 不是 C 的切超平面, 那么 H 与 C 相交于随 H 解析变化的 $2g-2$ 个不同点 $z_1(H), \cdots, z_{2g-2}(H)$。对 H 附近的 H', $\mathscr{G}$ 的 $\binom{2g-2}{g-1}$ 个分支由

$$\{D_I(H') = z_{i_1}(H') + \cdots + z_{i_{g-1}}(H')\}_{\#I=g-1},$$

给出, 并且因为这些分支中没有两个集合在 H 处, 所以 H 不能是分支点。用 $C^* \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ 表示 C 的切超平面集合后, 我们已经证明,

$$\begin{aligned} &B \subset C^* \qquad \text{处处}, \\ &B = C^* \qquad \text{在}(\mathbb{P}^{g-1})^* - V\text{中}。 \end{aligned}$$

但是现在我们得到, C^* 是不可约的: 它是接合对应 $I = \{(p, H) : H \supset T_p(C)\} \subset C \times \mathbb{P}^{g-1*}$ 的像, 它本身是 C 上用不可约纤维的纤维化, 并且因此是不可约的。

于是得到, 在 $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ 中,

$$\overline{B} = C^*,$$

即, S 的典范曲线的切超平面集合是 θ 除子 $\Theta \subset \mathscr{J}(S)$ 上 *Gauss* 映射 $\mathscr{G}$ 的分支轨迹 $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ 的闭集。

现在, 我们该结束证明了: 因为 $(\mathscr{J}(S), [\omega])$ 确定了 Θ 和 $\mathscr{G}$, 并且因此除了一个 $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ 的同构外确定了 C^*, 所有剩下的是证明, 如果 C 和 $C' \subset \mathbb{P}^{g-1}$ 是两条典范曲线, 其中 $C^* = C'^*$, 那么 $C \cong C'$。这不难得到: 只要注意到, 对每个点 $p \in C$, $(g-3)$ 维平面

$$T_p(C)^* = \{H \in (\mathbb{P}^{g-1})^* : H \supset T_p(C)\}$$

被包含在 $C^* = C'^*$ 中。但是由 Bertini 定理得到, 线性系的一般元素

$$\{H \cdot C'\}_{H \in T_p(C)^*}$$

在线性系的基点轨迹 $T_p(C) \cap C'$ 外是光滑的; 因为 $T_p(C) \subset C'^*$, 所以 $T_p(C)$ 必须是 C' 的切线。还有, 我们得到, 如果 $g > 3$, 那么没有与 C' 相切于两点 $q, q' \in C'$ 的直线: 如果有一条这样的直线, 那么由 Riemann–Roch 公式的几何描述, 我们将得到 $h^0(2q + 2q') = 3$, 并且由 Clifford 定理, 曲线 C' 必须是超椭圆的。因此我们可以写出唯一点 $p' \in C'$ 的 $T_p(C) - T_{p'}(C')$, 并且映射 $p \mapsto p'$ 给出 C 与 C' 的同构。如果 $g = 3$, 我们已经知道, 对 $\mathbb{P}^2$ 中的四次曲线 C 和 C' 只有有限个双切线; 映射 $p \mapsto p'$ 将扩张到这些点上来给出同构 $C \cong C'$。

本质上, 同样的证明对超椭圆曲线也成立: 再次, $\mathscr{G}_\Theta$ 在 $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ 中的分支轨迹将由那些超平面 H 组成, 使得 $\iota_\kappa^{-1}(H \cap C)$ 包含多个点。但是在超椭圆情形, 可能出现两种情况:如果 H 相切于 C, 或者如果 H 通过 ι_κ 的分支轨迹中的任意点。因此, $\overline{B}$ 将由 C^* 以及 ι_κ 的分支轨迹中每个 p 的超平面 $p^* = \{H : H \in p\} \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ 组成。那么实际上, $\overline{B}$ 确定了 C, 也确定了 C 上的 $2g+2$ 个点 $\{p_i\}$, 使得, S 可表示为正好在 $\{p_i\}$ 分支的 $C \cong \mathbb{P}^1$ 的二重覆盖; 就象我们在超椭圆曲线中讨论的一样, 它们确定了 S。 证毕

Torelli 定理在理论上保证了 Riemann 曲面 S 是所有性质都反映在它的极化 Jacobi 簇 $(\mathscr{J}(S), [\omega])$ 中。最后我们做一个评注, 实践上的情形与理论上的一样——读者可能注意到了, 我们在本章证明的每个结果可以简单地用映射

$$\mu : S^{(d)} \to \mathscr{J}(S)$$

的方式表示出来。的确, 就象我们已经看到的一样, 当用本质上的线性 Jacobi 簇表示出来时, 曲线的一些深奥的性质变得好处理了。因此, 曲线与其 Jacobi 簇之间的关系是非常丰富的。不幸的是, 虽然可以通过 Hodge 分解得到类似的构造, 对研究高维簇的类似方法没有找到。

参考文献(中文)

P. 格列菲斯, 代数曲线, 北京大学出版社, 1986。